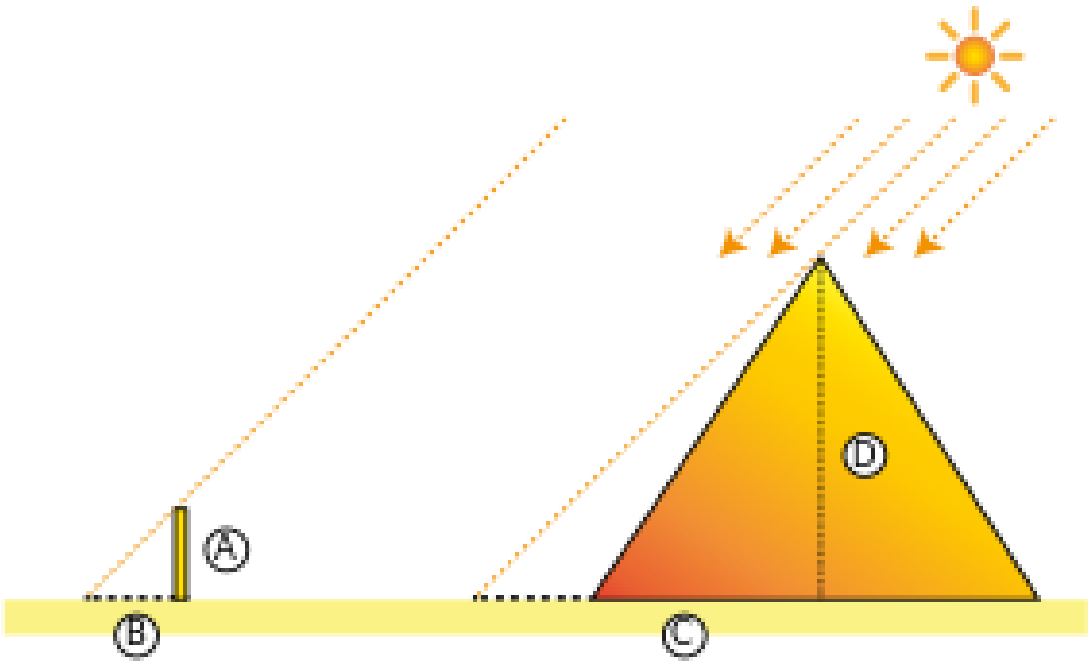
La mesure des hauteurs

IIIème-XIXème siècle

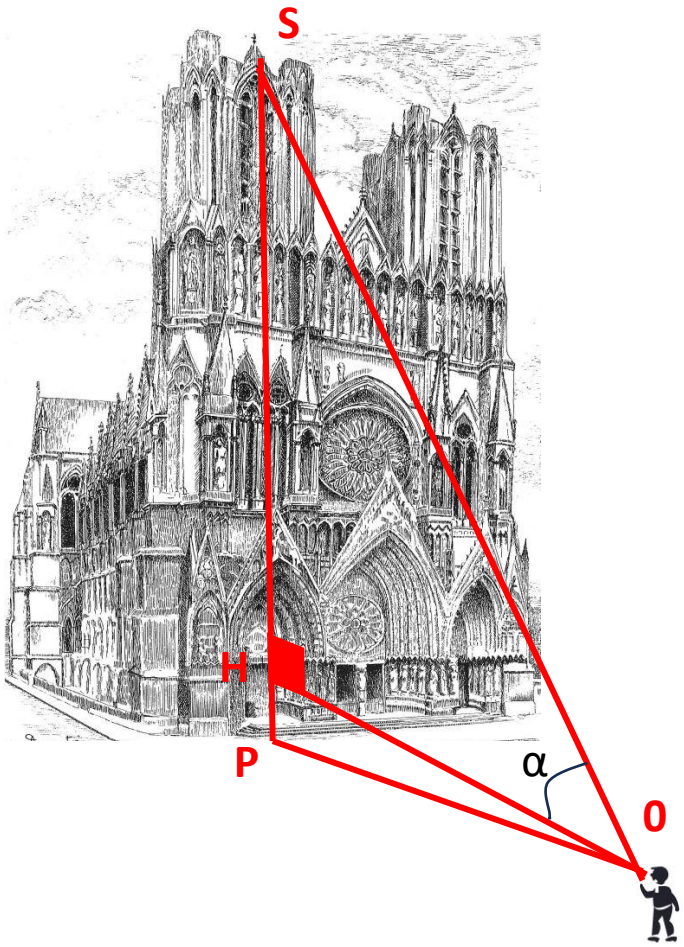
les contextes mathématiques et culturels

Utiliser les triangles semblables

$$\frac{D}{C} = \frac{A}{B}$$

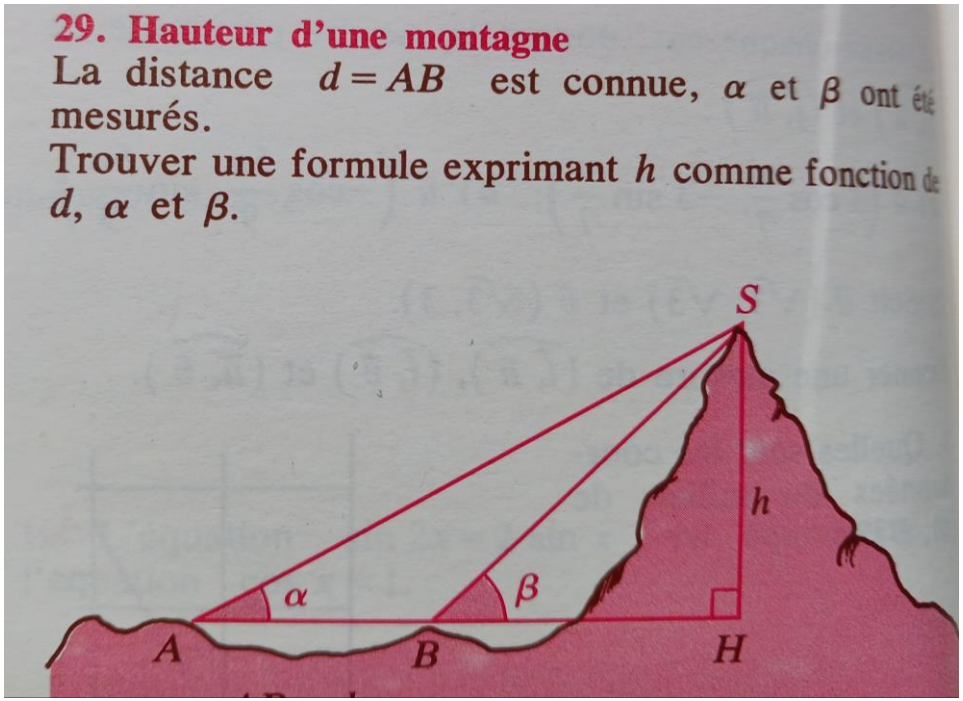


la trigo en classe de 4ème



$$SH = SO \sin\alpha = \frac{OH}{\cos\alpha}\sin\alpha$$

Hauteur dont la base est inaccessible : méthode de double station



29. Hauteur d'une montagne

La distance $d = AB$ est connue, α et β ont été mesurés.

Trouver une formule exprimant h comme fonction de d, α et β.

Terracher 1ère S et E, 1988, chap. 5, trigonométrie et relations métriques dans le triangle, p. 206

AH = $\mathrm{SH}\ cotan\alpha$

BH = $\mathrm{SH}\ cotan\beta$

AB = AH - BH

= $\mathrm{SH}\ \ cotan\ \alpha - \mathrm{SH}\ cotan\beta$

SH= AB $\frac{1}{cotan\alpha - cotan\beta}$

$h = d\,\frac{tan\alpha \times tan\beta}{tan\beta - tan\alpha}$

$h = d\,\frac{\sin\alpha\,\sin\beta}{\sin(\beta-\alpha)}$

Questions

- Quand ces méthodes de mesurage sont-elles apparues ?
- Dans quelles aires géographiques et culturelles se sont-t-elles développées ?
- Avec quels moyens techniques ?
- Quel rôle ont joué les angles et les lignes trigonométriques ?

Première exploration des sources « occidentales »

- Euclide (300 ans avant J-C)

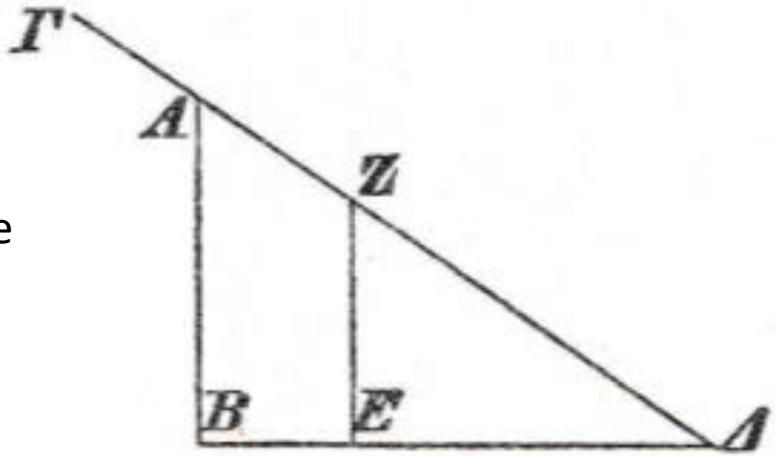
- Héron d'Alexandrie (1er siècle après J-C)

- Les recueils dits « œuvres mathématiques de Gerbert » (pape Sylvestre II, ~ 950 - 1003)

l'*Optique* d'Euclide :

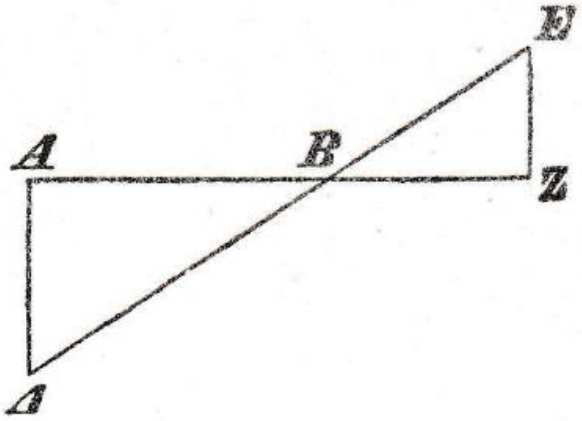
la théorie **d'une géométrie pratique** (300 ans av. J.-C.)

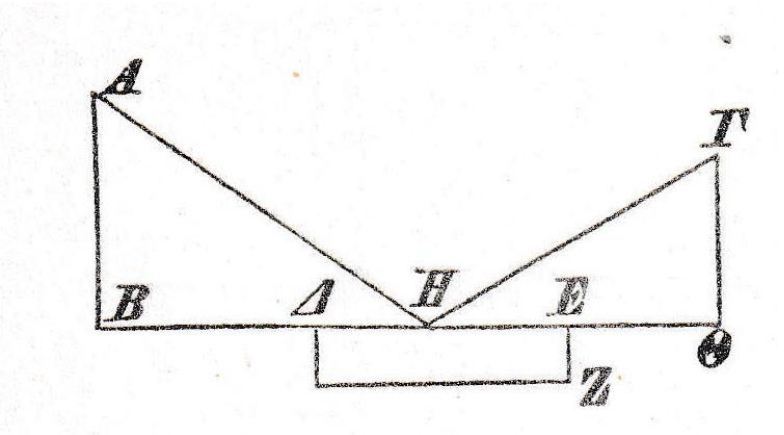
Prop. XVIII : le soleil étant apparent, reconnaître de quelle grandeur est une hauteur donnée



Prop. XIX : reconnaître de quelle grandeur est une hauteur donnée lorsque le soleil ne se présente pas

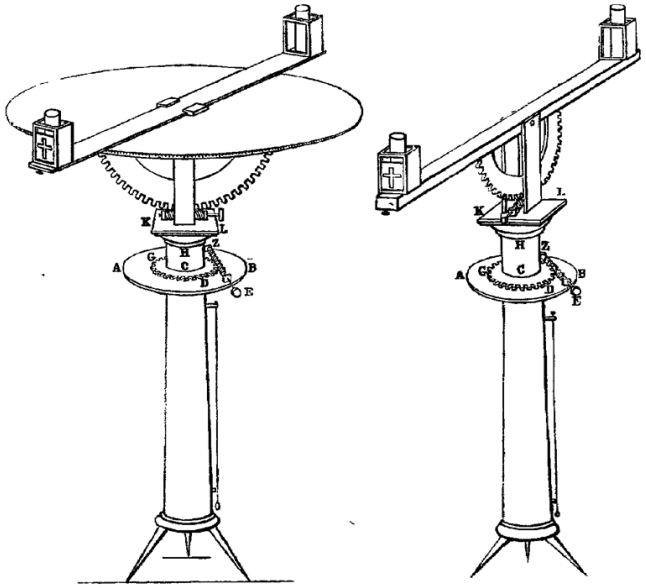
Prop. XX : reconnaître de quelle grandeur est une profondeur donnée

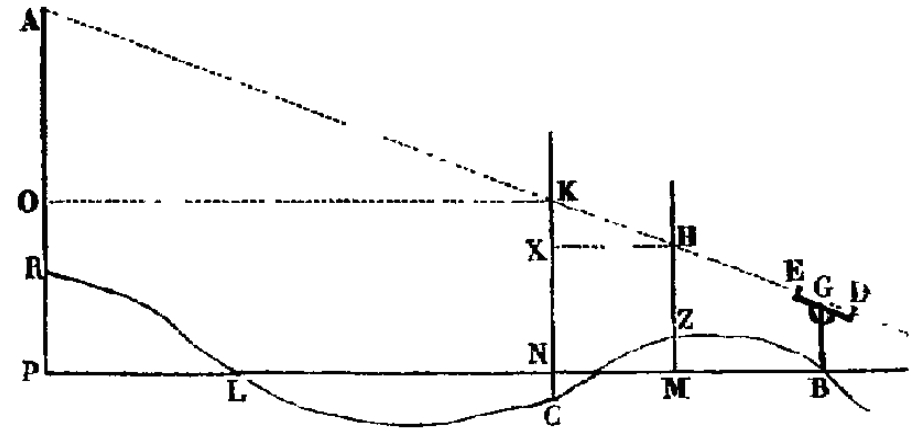


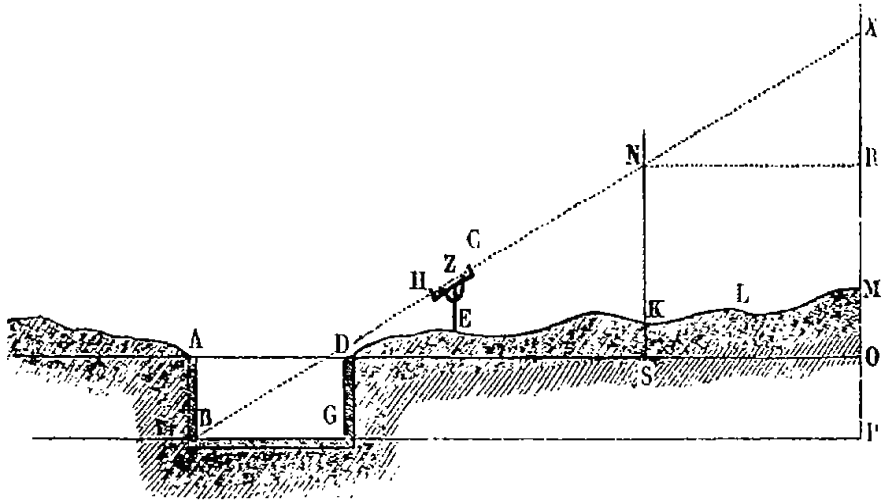


Héron d'Alexandrie (1er siècle ap. J.-C.)

La Dioptre : une géométrique (vraiment) pratique







Le savant GERBERT

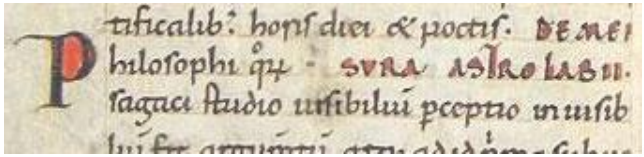
Gerbert ~ 945 – 1003 : le Pape de l'an mil

- séjour en Catalogne, au monastère de Ripoll (importante activité de copistes)
- dirige le collège épiscopal de Reims
- abbé de Bobbio en Italie (riche bibliothèque)
- retour à Reims, secrétaire de l'archevêque Adalbéron, puis évêque
- élu Pape (999)

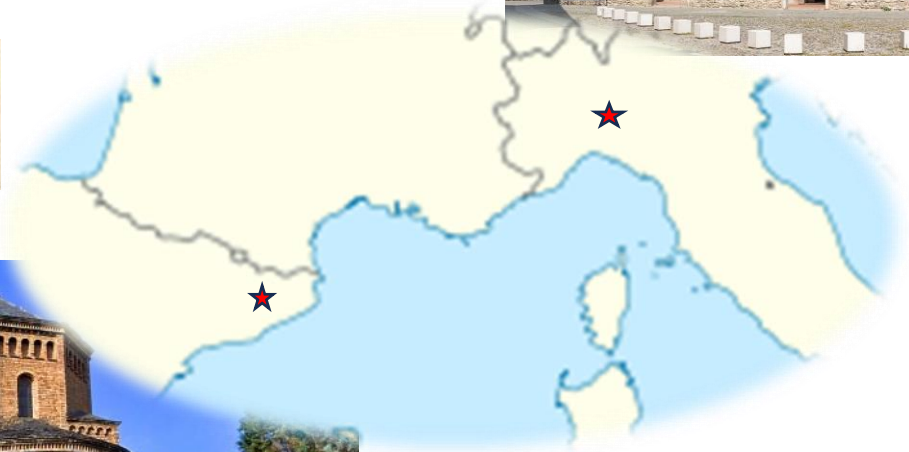
Voyages de GERBERT

Maslama

Lupitus



manuscrit 225



Les œuvres de Gerbert éditées par Bubnov (1899)

Gerberti

postea

Silvestri II papae

Opera Mathematica

(972—1003)

Accedunt aliorum opera ad Gerberti libellos aestimandos intelligendosque necessaria per septem appendices distributa.

Collegit, ad fidem codicum manuscriptorum partim iterum, partim primum edidit, apparatu critico instruxit, commentario auxit, figuris illustravit

Dr. Nicolaus Bubnov

Professor Kijoviensis.

1.

Gerberti liber de astrolabio.

Appendix IV.

1.

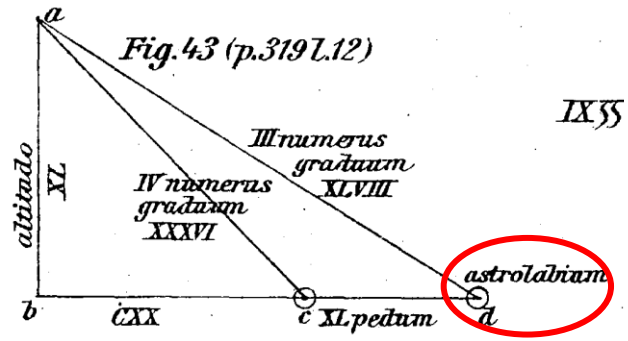
Geometria incerti auctoris

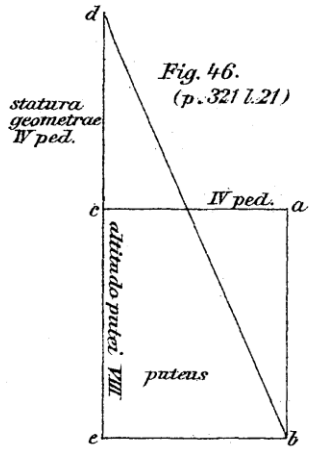
(hucusque ut cc. 14—94 Geometriae Gerberti edi solebat).

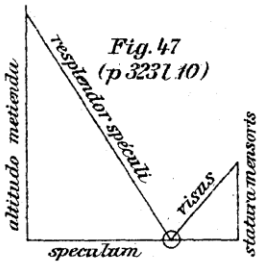
Des manuscrits datant des Xè-XIè siècles réunis et édités en 1899

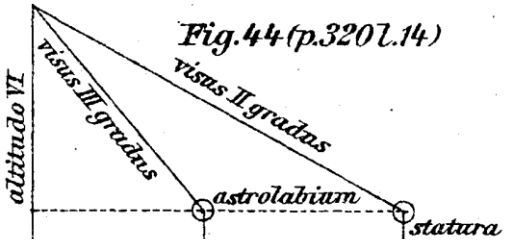
Geometria Incertis Auctoris :

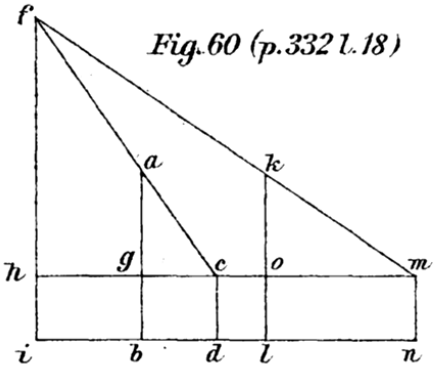
La double station

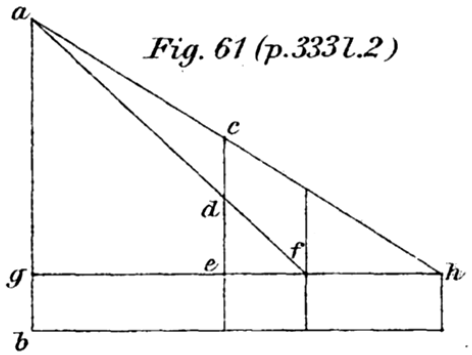


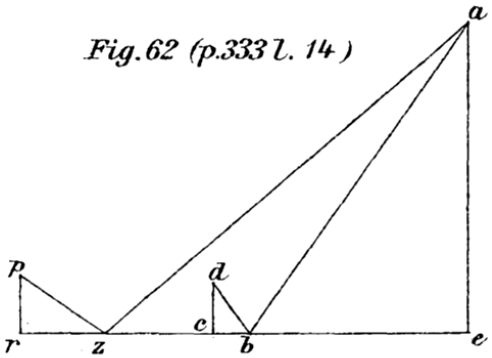












Geometria Incerti Auctoris

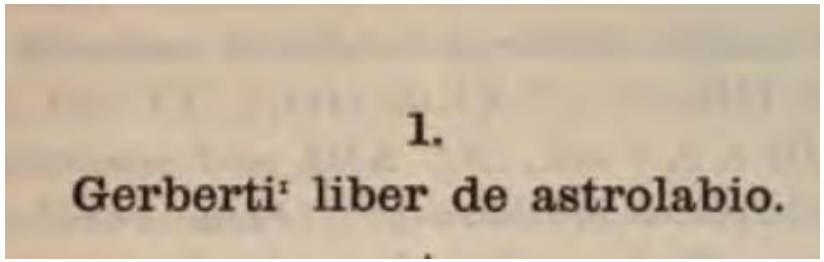
- Un ensemble hétérogène, problèmes d'arpentage véritable ou problèmes scolaires ?

- Les manuscrits les plus anciens sont du XIè siècle. Mais les textes se présentent comme des réarrangements, ils doivent être basés sur une version antérieure, précédant peut-être un peu la période de Gerbert [K. Vogel, p. 5]

- Dans le livre III : 26 problèmes d'altimétrie
  - Utilisation de miroirs (cf. l'*optique* d'Euclide)
  - Méthode de double station
  - Utilisation de l'astrolabe (avec carré des ombres, innovation probablement due aux arabes)
  - Présence du mot alidade *halhidadae*, d'origine arabe لعضادة

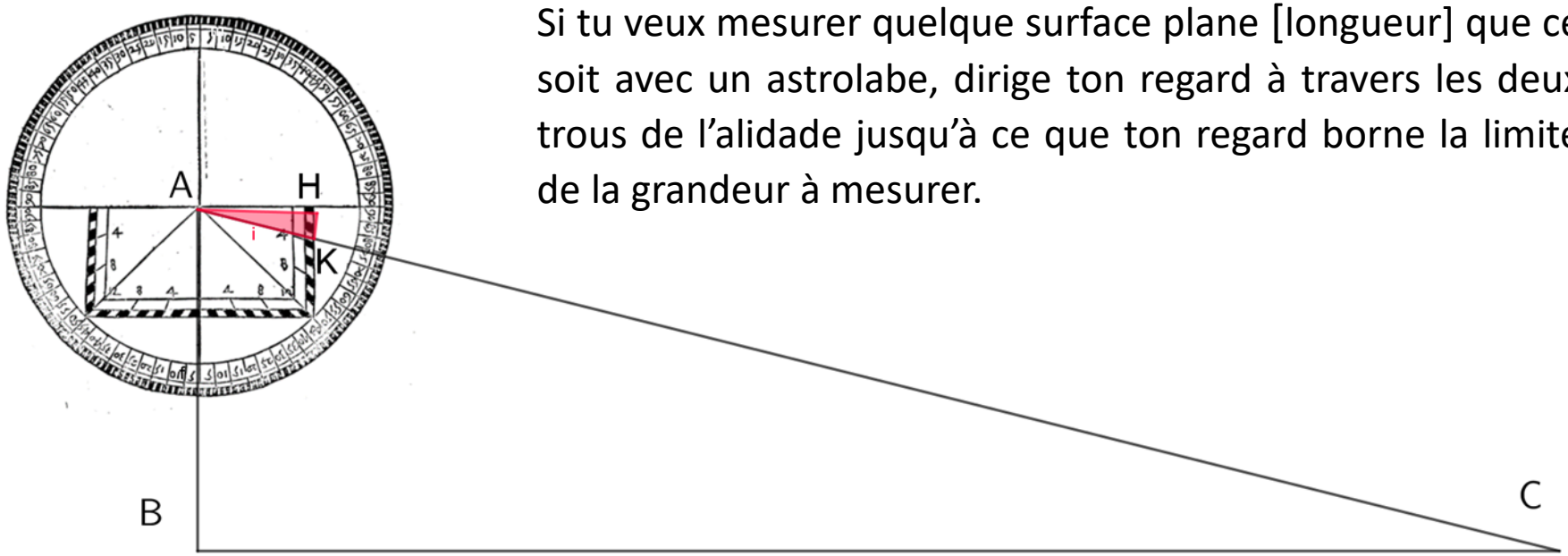
Pas de méthodes équivalentes dans les textes latins antérieurs

astrolabe


1.
Gerberti liber de astrolabio.

- invention par Hipparque (astronome grec du 2ème siècle avant J.C.) ?
- Traité le plus ancien connu aujourd'hui Jean Philopon dit Jean d'Alexandrie (Vè- VIè siècle)
- Introduit en Occident par Gerbert ?

Le carré des ombres



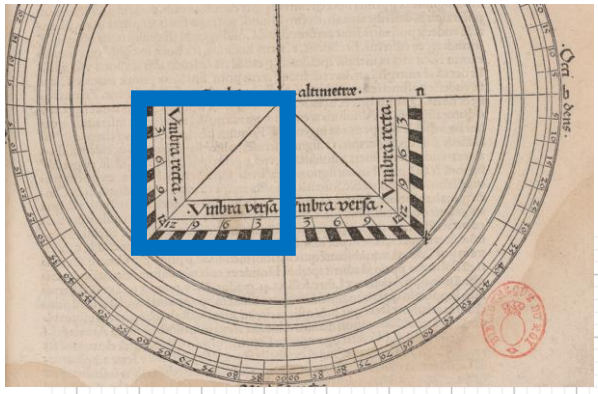
Si tu veux mesurer quelque surface plane [longueur] que ce soit avec un astrolabe, dirige ton regard à travers les deux trous de l'alidade jusqu'à ce que ton regard borne la limite de la grandeur à mesurer.

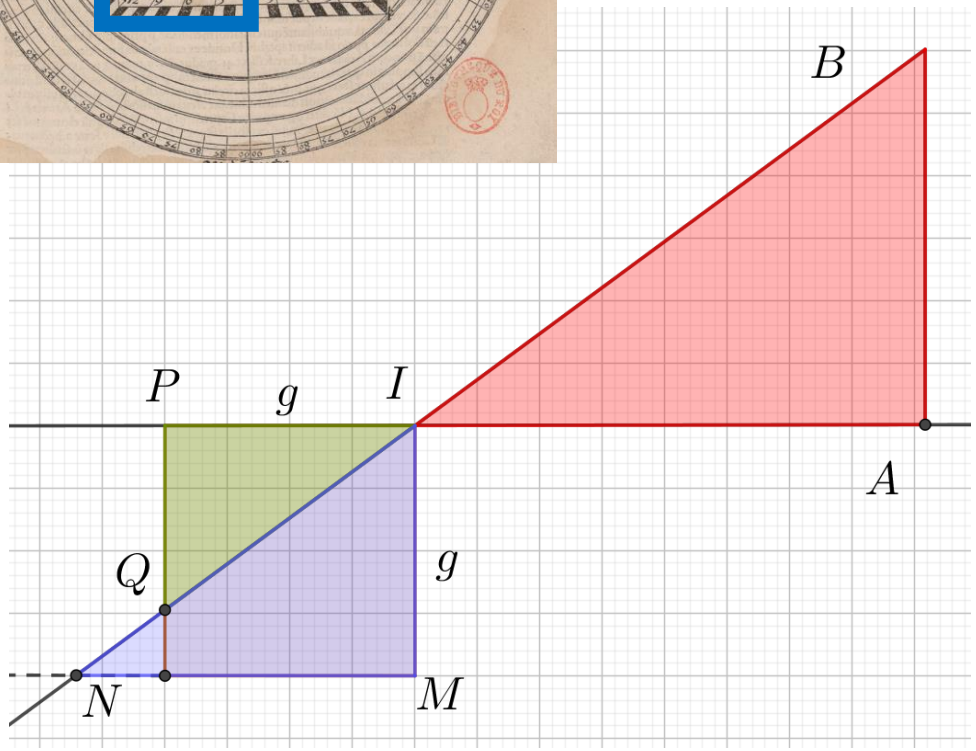
Après cela, regarde à quel quantième de carré se trouve l'alidade et compare ce nombre avec 12 qui est le nombre de degrés maximum ; le rapport de la grandeur de l'arpenteur à la surface [longueur] totale est le même que le rapport de la graduation à 12.

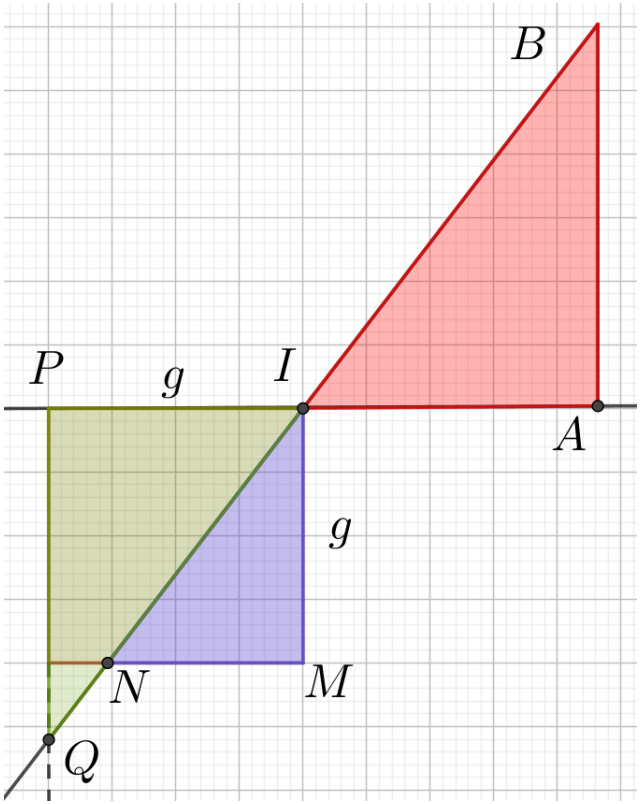
$$\frac{BA}{BC} = \frac{HK}{HA}$$

Bubnov, p. 320

Deux cas de figures







Parcours chronologique

- Liu Hui, « l'Euclide chinois » (IIIè siècle ap. JC)
- En Inde :
  Aryabatha (476–550) et Brahmagupta (598-670)
- En pays d'islam :
  As Sufi (903-986**),** Al Biruni (973-1050)
- Les *géométries pratiques* en Occident après le XIème siècle
- L'intervention de la *géométrie linéaire* au XIXè siècle

Sources chinoises

1. Le ***gnomon des Zhou*** (dynastie des Zhou : 1121 av JC - 256 av JC)

2. **Les *neuf chapitres sur l'art mathématique*** compilés sous les Han (202 av JC – 220 ap JC)

3. **Le *classique de l'île maritime,*** œuvre de Liu Hui (IIIème ap JC, « l'Euclide chinois »), complément au 9ème chapitre (intitulé base et hauteur)

Liu Hui : *le classique de l'île maritime*

(263)

9 problèmes comportant chacun : un énoncé, une réponse numérique, la méthode de calcul.

Premier problème :

Maintenant, pour regarder une île dans la mer, érige deux piquets de même hauteur, 3 shang, distants de 1000 bu, de sorte que le piquet à l'arrière soit aligné avec le piquet de devant.

Si on recule de 123 bu depuis le piquet de devant, et que l'on regarde depuis le niveau du sol jusqu'au sommet de la montagne sur l'île, celui-ci coïncide avec l'extrémité du piquet.

Si on recule de 127 bu depuis le piquet arrière, et que l'on regarde depuis le niveau du sol jusqu'au sommet de la montagne, celui-ci coïncide encore avec l'extrémité du piquet (de derrière).

La question est de trouver la hauteur de l'île et la distance qui la sépare du piquet de devant.

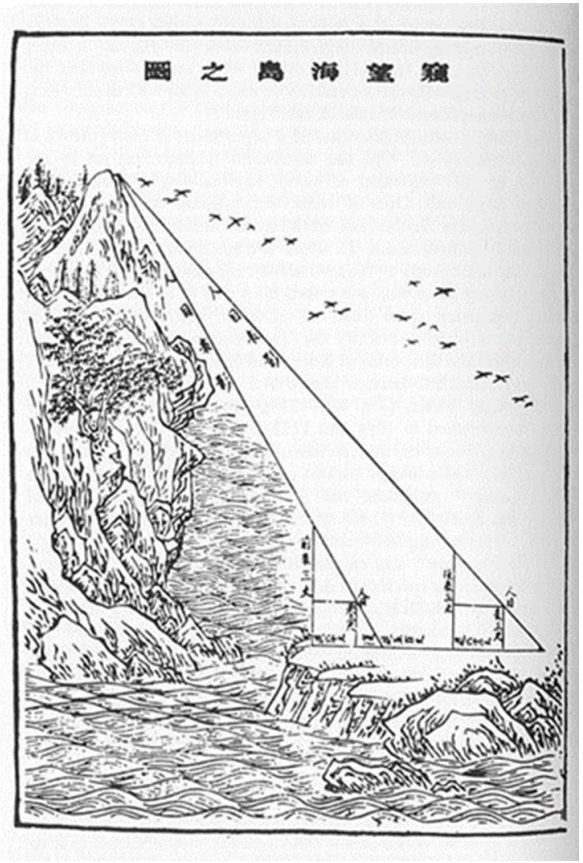


Illustration dans une édition de 1726

Mis en français, d'après le texte de Kurt Vogel, 2002, p. 1,

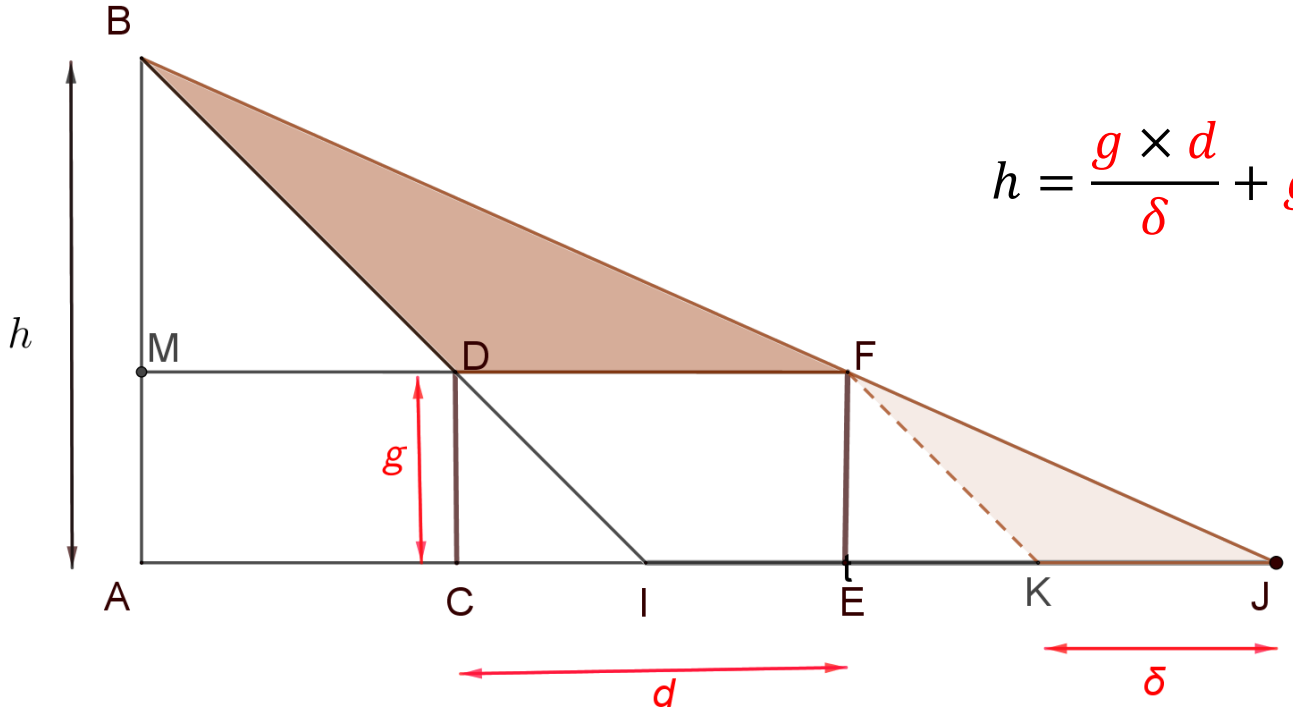
le classique de l'île maritime

Démonstration hypothèse 1

(BDF) et (FKJ) semblables

$$\frac{\mathrm{BM}}{\mathrm{FE}} = \frac{\mathrm{DF}}{\mathrm{KJ}}$$

$$h = \frac{g \times d}{\delta} + g$$



le classique de l'île maritime

Démonstration hypothèse 2 (« la double différence »)

MFB et EJF semblables $\frac{\mathrm{MF}}{\mathrm{MB}} = \frac{\mathrm{EJ}}{\mathrm{EF}}$

$\mathrm{MF} = \mathrm{MB}\,\frac{\mathrm{EJ}}{\mathrm{EF}}$

MDB et CID semblables $\frac{\mathrm{MD}}{\mathrm{MB}} = \frac{\mathrm{CI}}{\mathrm{CD}}$

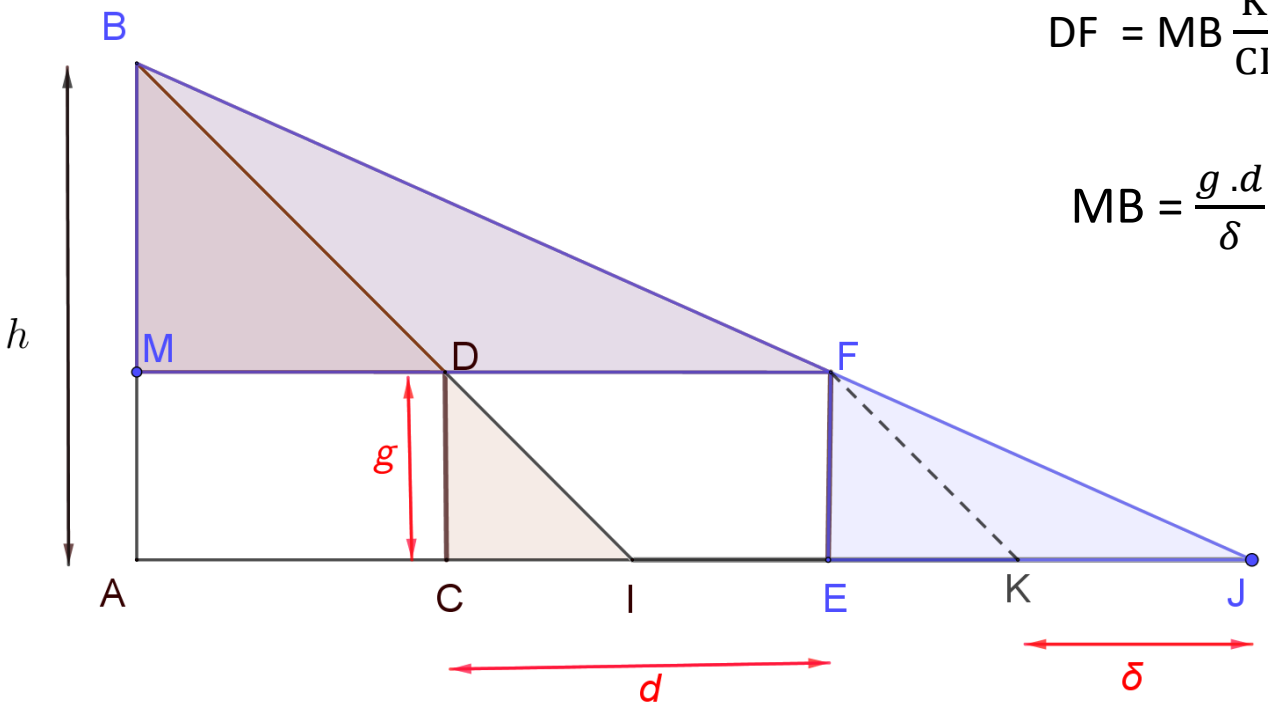
$\mathrm{MD} = \mathrm{MB}\,\frac{\mathrm{CI}}{\mathrm{CD}}$

$\mathrm{DF} = \mathrm{MB}\,\frac{\mathrm{KJ}}{\mathrm{CD}}$

$d = \mathrm{MB}\,\frac{\delta}{g}$

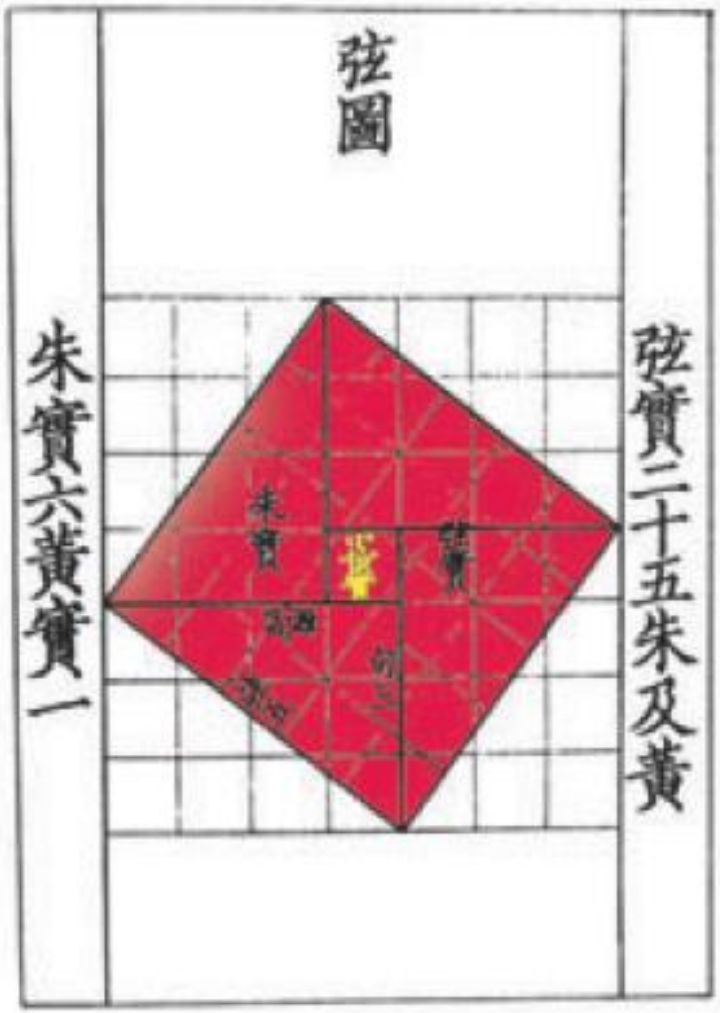
$\mathrm{MB} = \frac{g\,.d}{\delta} = g.\frac{\mathrm{MF}-\mathrm{MD}}{\mathrm{EJ}-\mathrm{CI}}$

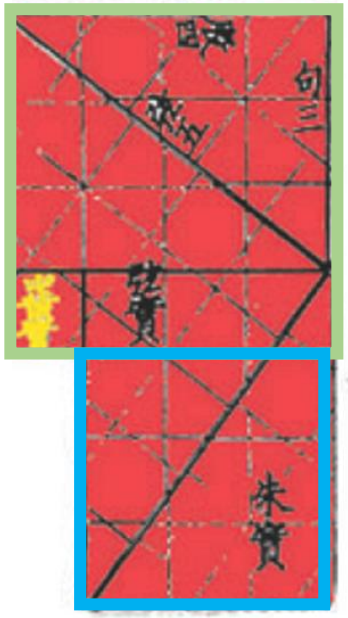
$h = \frac{g\,.\,d}{\delta} + g$



Le 9ème chapitre – Base et Hauteur – traite du triangle rectangle

une preuve du « théorème de Pythagore » au 3ème siècle





- Commentaire de Zhao Chang au gnomon des Zhou
- Commentaire de Liu Hui au 9è chapitre

Voir K. Chemla p. 674

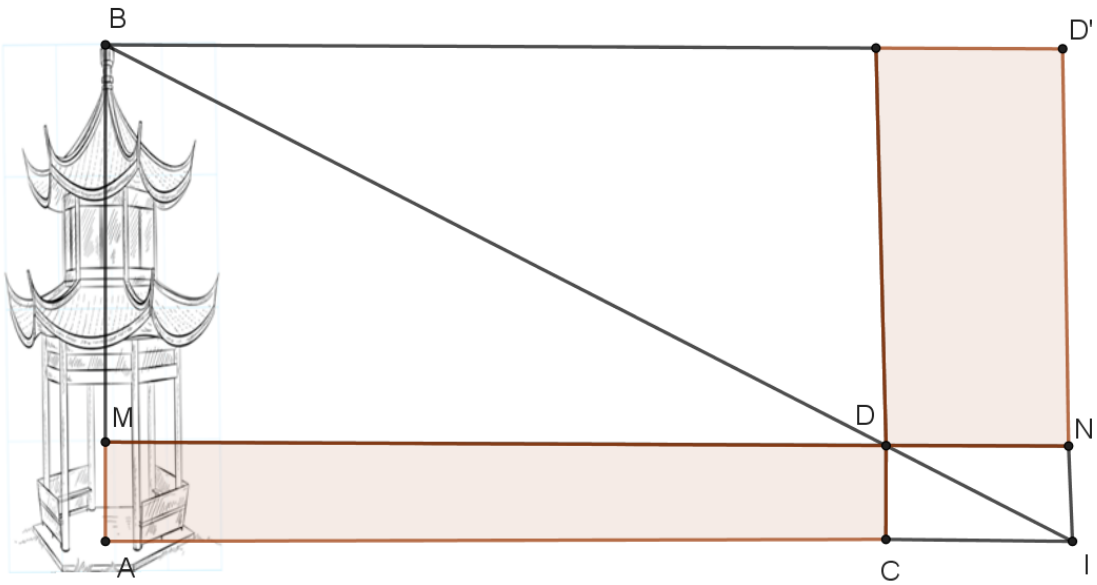
En Chine : la méthode des aires

(AD) = (DD’) BM. DN = DC . AC

$$\frac{BM}{DC} = \frac{AC}{DN}$$

(AN)=(CD’) AB. CI = AI. DC

$$\frac{AB}{DC} = \frac{AI}{CI}$$



La méthode de Liu Hui

Hypothèse 3

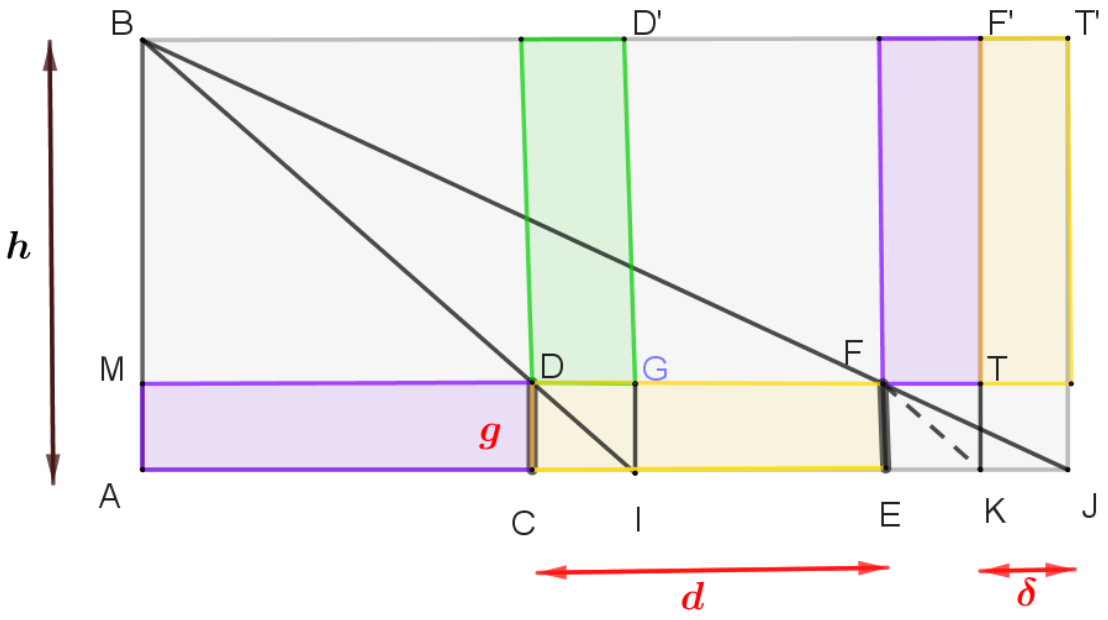
(FT') = (AF)

(DD')= (FF') = (AD)

(TT') = (CF)

F'T. F'T' = CE . CD

$$F'T = \frac{d \times g}{\delta} \qquad h = g + \frac{d \times g}{\delta}$$



Méthode utilisée par
- Zao Shang (IIIè siècle) pour évaluer la distance de la Terre (plate) au Soleil
- Yang Hui (XIIè siècle)

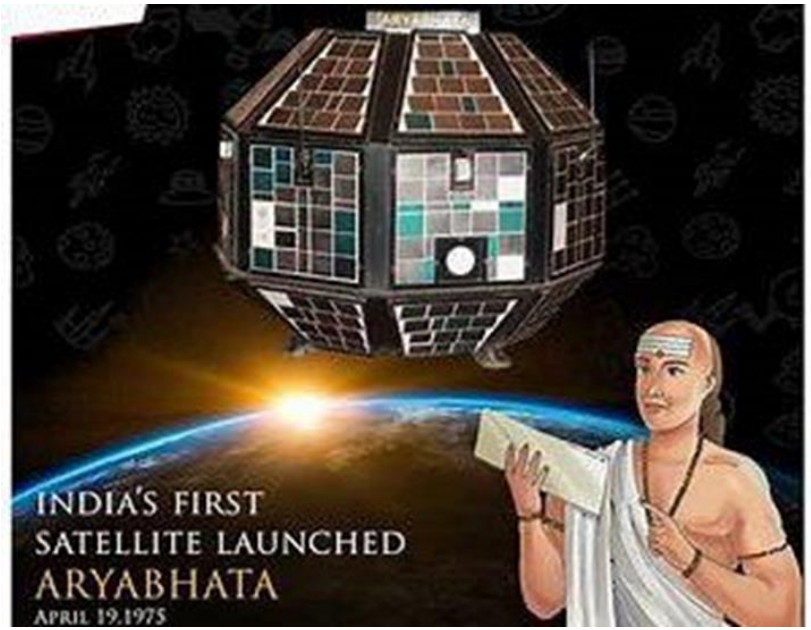
En Inde

Aryabatha (476-550) : Aryabathayia 499

Brahmagupta (598-670) : Brahmasphutasiddhanta 628

versifiés, très concis

commentaire de l'Aryabathayia par Bhaskara 629



Des feuilles de palmier

En Inde, les manuscrits sont le plus souvent des feuilles de palmier traitées de manière à devenir étanches. Les textes y sont gravés à l'aide d'un stylet. Ces feuilles sont ensuite enduites d'encre : celle-ci s'insère dans les sillons tracées par le stylet rendant les lettres visibles. Ces manuscrits se conservent mal : ils souffrent de l'humidité, de la chaleur et sont rongés par les vers. Les plus anciens manuscrits de ce type qui nous sont parvenus ont moins de 700 ans.

[A. Keller, 2000, p. 12-14]

Aryabhata 476 – 550

L' Âryabhatîya : 4 chapitres, tous écrits en vers sous forme de distiques :

1) *Harmonies célestes* qui est un recueil de tables numériques (13 distiques).

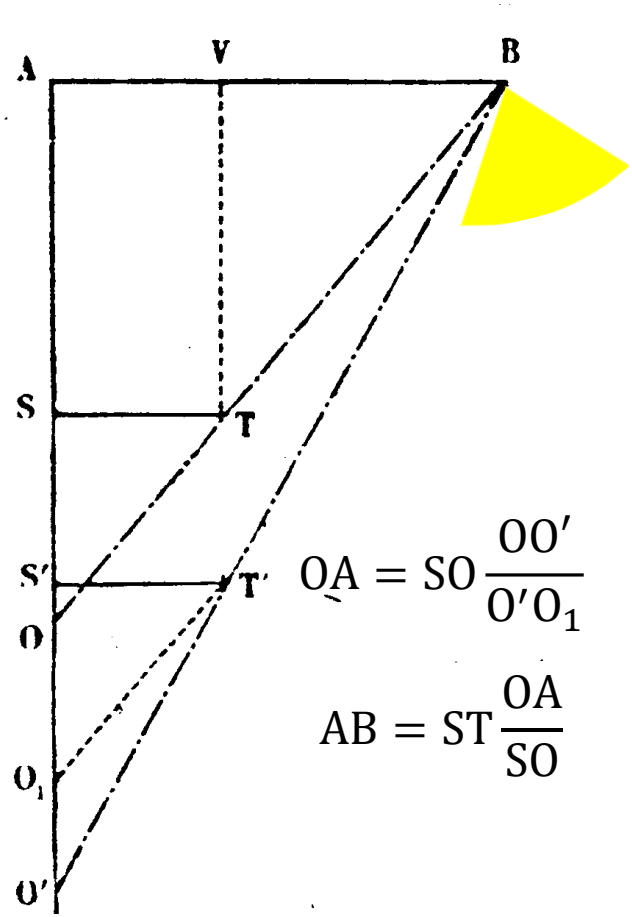
2) *Éléments de calcul* (33 distiques, dont une méthode de construction d'une table de *jiva* = demi-cordes)

(trad. française de L. Rodet, 1879)

3) *Du temps et de sa mesure* (25 distiques).

4) *Des sphères* (50 distiques).

Aryabhata



$$OA = SO\frac{OO'}{O'O_1}$$

$$AB = ST\frac{OA}{SO}$$

XVI.

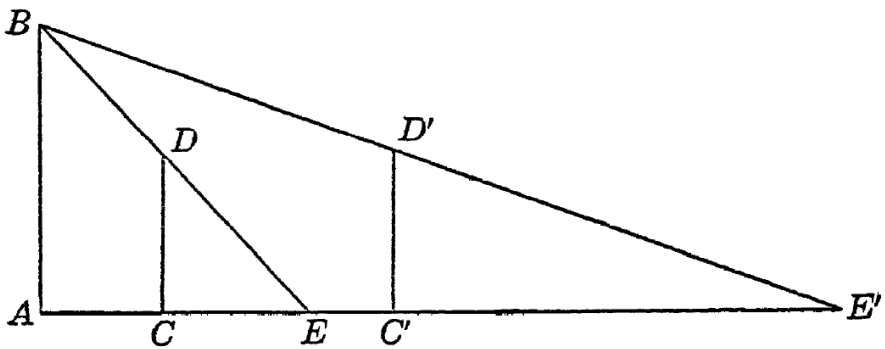
Multipliez par l'ombre SO la distance des extrémités des deux ombres OO', et divisez par la différence O_1O' [des ombres], vous aurez la **hauteur** OA [du triangle] ;

- cette **hauteur** multipliée par le style ST et divisée par l'ombre SO donne AB le bras [du candélabre]

AB =le bras = *bhuja* ; OA = **la hauteur = *Koti***
[traduction Rodet, 1879, p. 417-418]

Aryabatha

d'autres interprétations



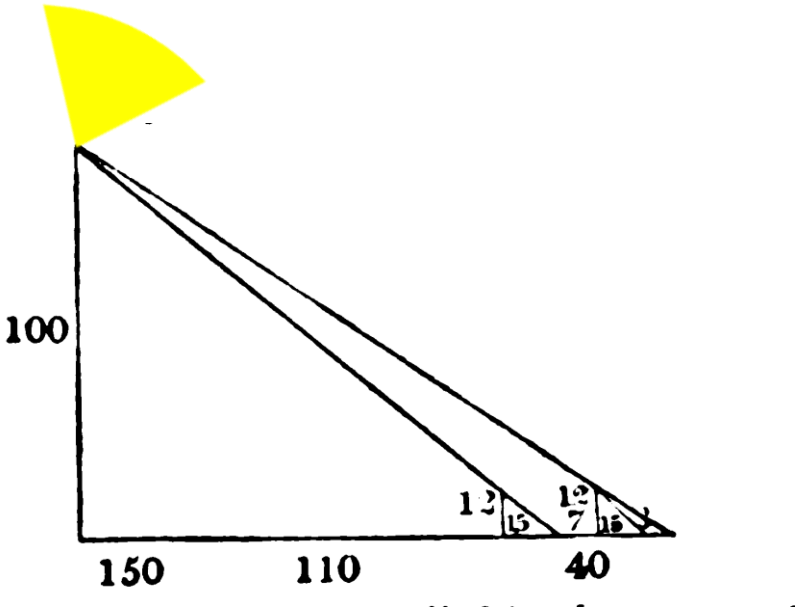
AB = *bhujā*

AE = *koṭī*

The word *koṭī* means perpendicular (or upright) and the rule might be interpreted, as Rodet takes it, as meaning that the *bhujā* and the gnomon extend horizontally from a perpendicular wall. But the words *bhujā* and *koṭī* also refer to the sides of a right-angle triangle without much regard as to which is horizontal and which is upright.

[Clark, 1930, p. 33]

Brahmagupta (598-670)



- L'ombre multipliée par la distance entre les extrémités des ombres et divisée par la différence des ombres est la base.
- La base, multipliée par le gnomon, et divisée par l'ombre est la hauteur de la flamme du luminaire

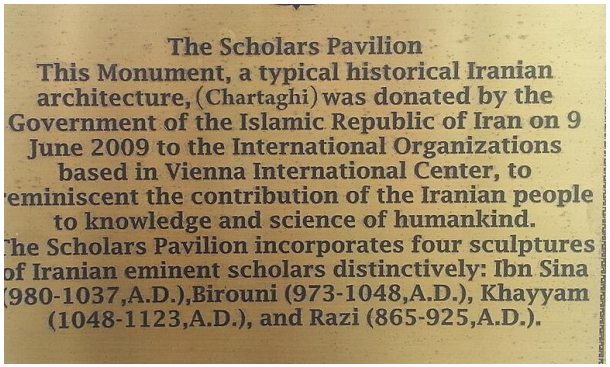
D'après le texte anglais de [Colebrooke, 1817, p. 318]

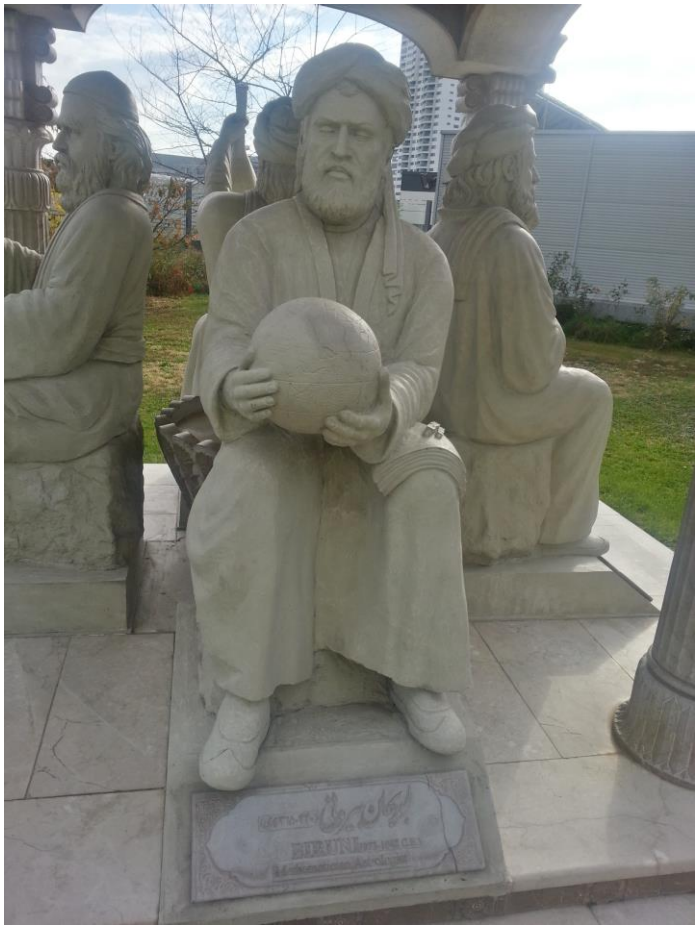
le commentaire de l'Aryabathiya par Bhaskara (~600 - ~ 680)

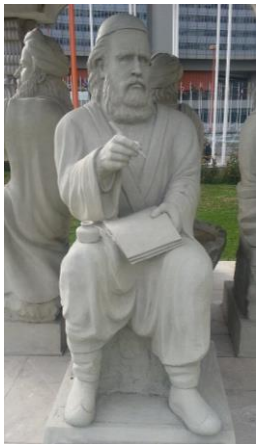
En élargissant le champ géographique de nos investigations, l'échange continuel avec Karine Chemla [auteure de l'édition français-chinois des *Neuf Chapitres*] nous a amenées à remarquer de nombreuses similitudes entre les mathématiques pratiquées par Bhaskara et le commentaire de Liu Hui aux Neuf Chapitres. Il existe en premier lieu une parenté de problèmes et algorithmes considérés : règle de trois, problèmes de bambous cassés et lotus immergés, rencontres de deux corps, problèmes du pulvérisateur, tous ont leur équivalent dans les textes chinois, quoiqu'il existe d'évidentes différences dans leurs traitements….

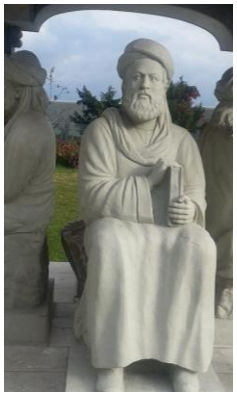
Il s'agit là d'un pan entier de l'histoire internationale des mathématiques qui reste pour l'instant inexploré. [A. Keller, 2000, p. 256]

Un savant de l'an mil : Al Biruni 973-1050









Al Biruni

- [1985/≈1000] *Livre des clefs de l'astronomie* trad. Marie-Thérèse Debarnot
- [1934/1029] *The Book of Instruction in the Elements of the Art of Astrology*, trad. R. Ramsay Wright
- [1976] *The exhaustive Treatise on Shadows* , traduction et commentaires : Edward S. Kennedy (d'après un manuscrit de 1234)
- [1910/1030] *An Account of the Religion, Philosophy, Literature, Geography, Chronology, Astronomy, Customs, Laws and Astrology of India about a.d. 1030.*, 2 vol. trad. Edward Sachau
- [1967/1031] *The Determination of the Coodinates of Positions for the Correction of Distances between Cities*, trad. Jamil Ali

astrologue mais pas dupe ?

كتاب التفهيم
لِاوائِل صِناعة التنجيم

[1934/1029] *The Book of Instruction in the Elements of the Art of Astrology*

..à sa demande, j'ai préparé un aide mémoire pour Rayhanah (la Khwarizmia), fille de al-Hasan, sous la forme de questions et réponses qui, non seulement est élégant, mais facilite aussi la formation des concepts.

J'ai commencé par la Géométrie, et j'ai poursuivi par l'Arithmétique et la Science des Nombres, puis par la structure de l'Univers, et finalement par l'Astrologie Judiciaire, car nul n'est digne du titre d'Astrologue s'il n'est pas d'abord bien informé de ces quatre sciences.

[p. 1]

……

Il est temps de passer aux expressions dont usent les Astrologues concernant les décisions des étoiles, et qui intéressent le lecteur. En majorité, les gens considèrent les décisions des étoiles comme relevant des sciences exactes, tandis que ma confiance dans ses résultats et dans la profession me rangent plutôt dans la minorité.

[p. 346-347]

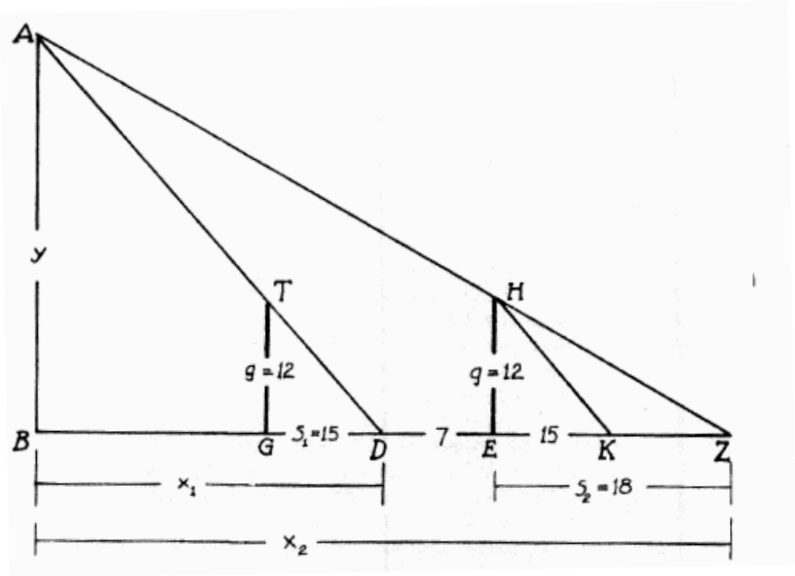
Al Biruni et l'héritage indien

C'est ce type de technique qui est expliqué ainsi par Brahmagupta dans le livre mentionné (Brahmasiddantha) :

S'il y a une lampe sur un minaret (منارة), avec un obstacle intervenant entre nous et sa base, et près de nous un gnomon dont la longueur est de 12 doigts, et derrière un autre gnomon de même taille, son ombre étant 18 doigts et si de la pointe de la première ombre à la base du second gnomon il y a 7 doigts, soit à trouver la hauteur du minaret….

[Biruni/ Kennedy, traité des ombres, Vol 1 p. 258]

La règle est bien chez Brahmagupta, les valeurs numériques sont celles d'un commentateur indien. [Kennedy vol 2, p. 162]

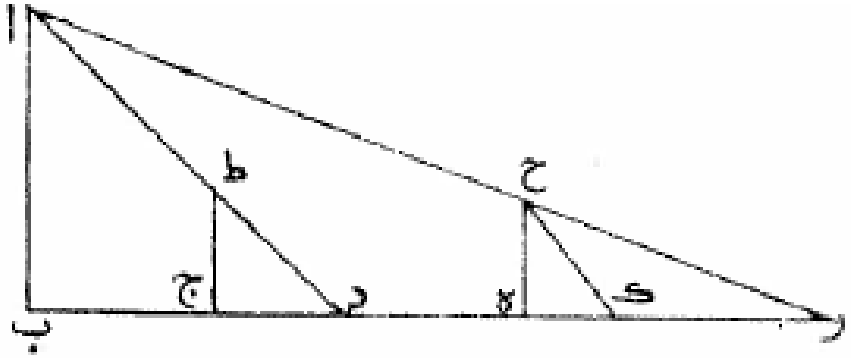


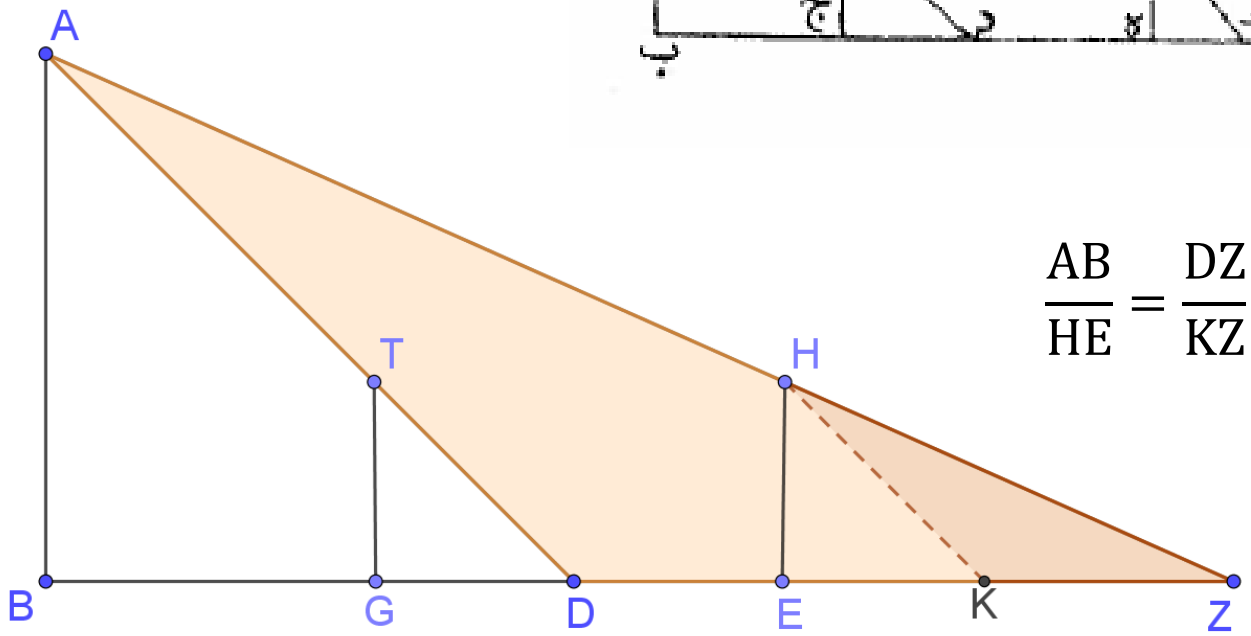
Minaret :

منارة (manara) phare, tour à feu ; lumière : نور (nour)

مأذنة (madhana) ; annoncer : أذن (adhana) ; muezzin : موذن

Biruni : traité exhaustif des ombres





$$\frac{AB}{HE} = \frac{DZ}{KZ}$$

vocabulaire : l'héritage indien

Gnomon

1/ sanscrit : śaṅku → شخس (shakhs)

2/ مقياس miqyas = jauge, échelle de mesure (قاس = mesurer)

Doigt (unité)

1/ sanscrit : angula (doigt) → انكل (ankula) انجل (anjula)

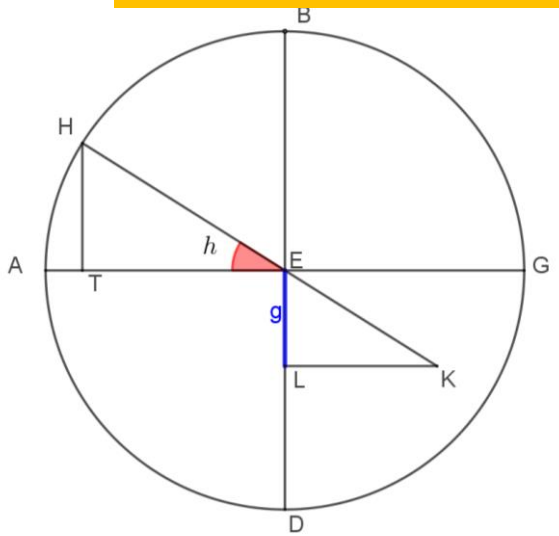
2/ اصبع = doigt (اصاب toucher)

Sinus

sanscrit : Jiva ou Siva (demi-corde)

→ جيب jaïb =ouverture → sinus (جاب = fendre, ouvrir)

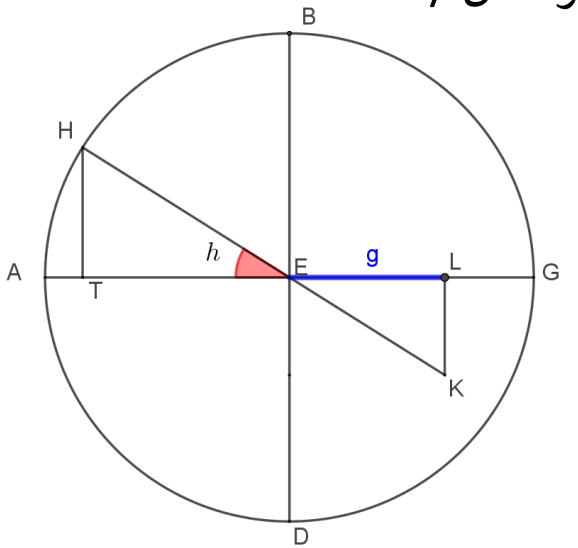
les ombres et la trigonométrie



Nous faisons EL égal au gnomon, et le soleil est au point H. Ainsi AH sera sa hauteur et la perpendiculaire HT est le sinus de cette hauteur, et HB le complément de sa hauteur, et ET est égal à son sinus.
Traçons le rayon HEK et LK perpendiculaire à EL. Ainsi LK sera l'ombre directe (1) de la hauteur AH et KE le diamètre de l'ombre (2) [Kennedy p. 90, Biruni p. 59]

1/ الظل المتوى = l'ombre directe = cotangente = LK

2/ القطر الظل = la diagonale de l'ombre = la cosécante (= $\frac{1}{sin}$) = KE



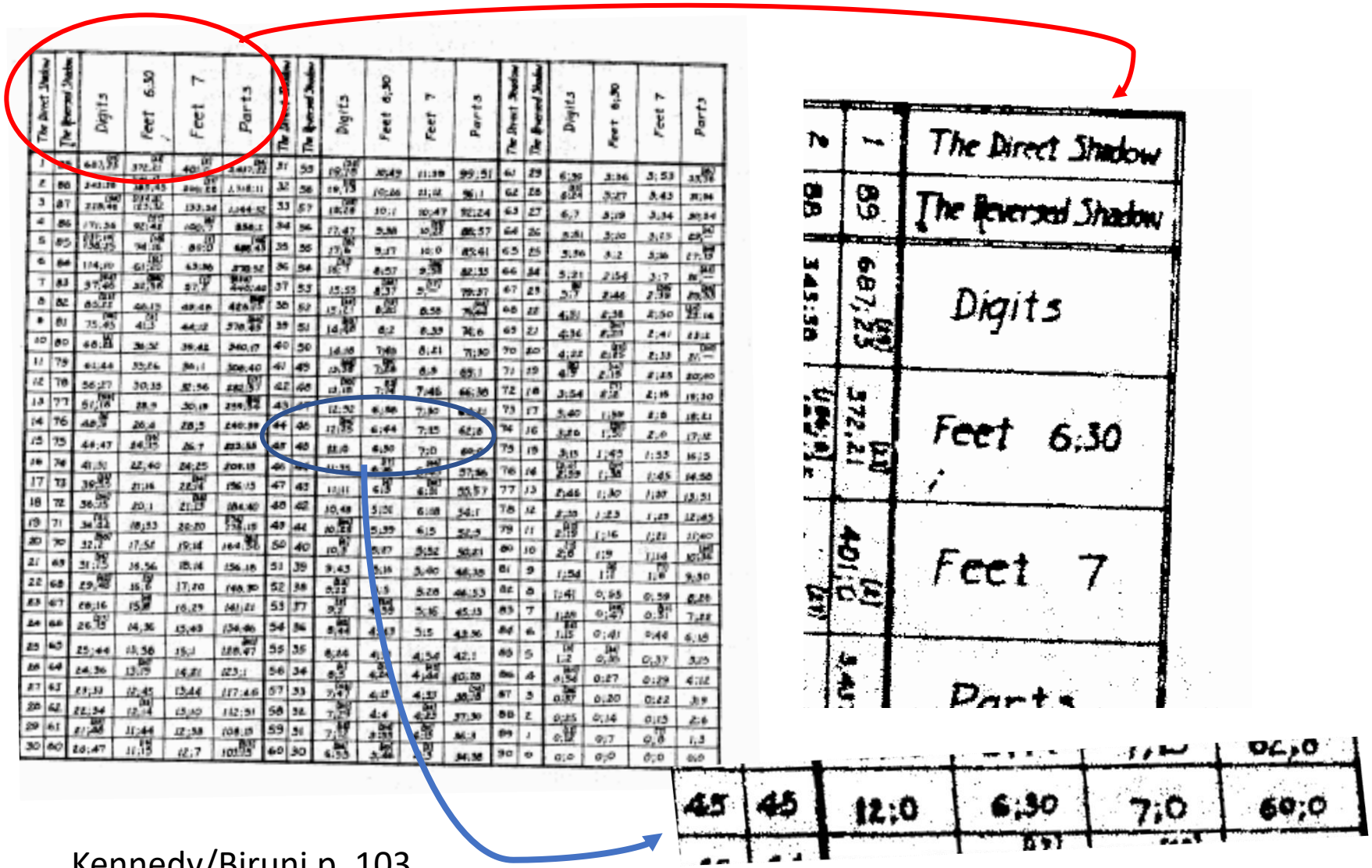
de même si le gnomon g est horizontal :

LK = الظل المعكوس = l'ombre verse (la tangente)

الظل الزاوية = l'ombre de l'angle = tangente

(en arabe moderne selon les dictionnaires Mounged 1972 et Reverso 2021)

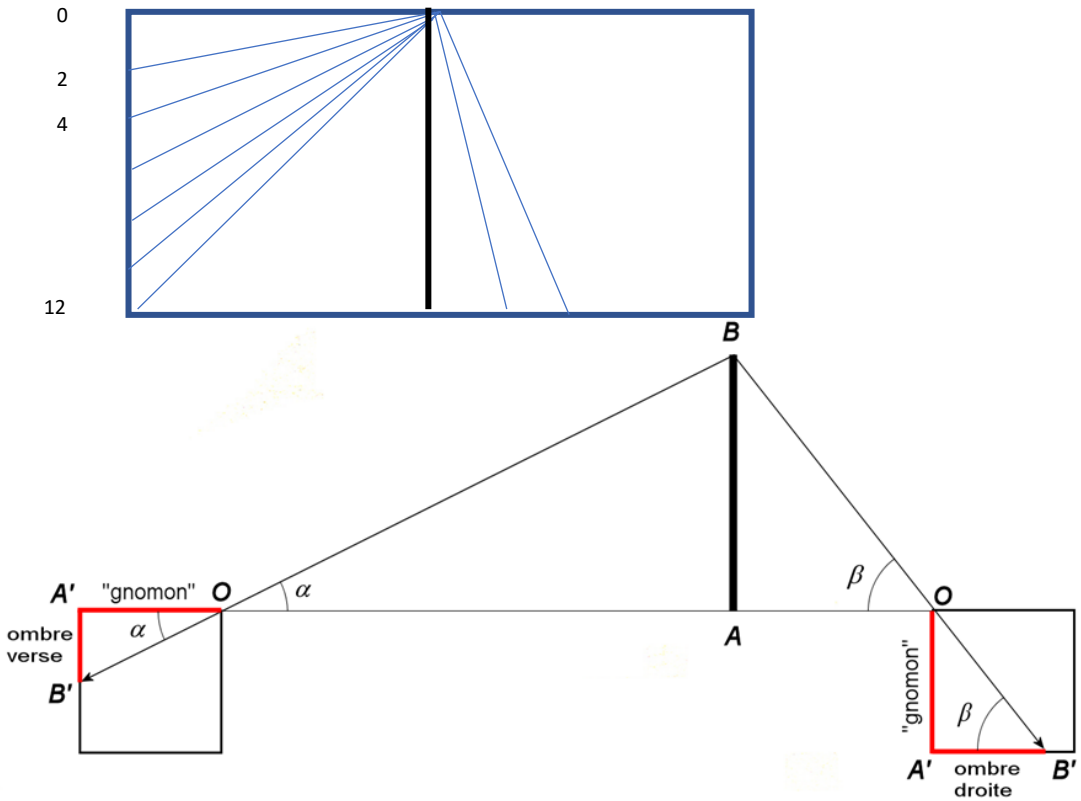
des tables trigonométriques



Kennedy/Biruni p. 103

l’astrolabe et le carré des ombres

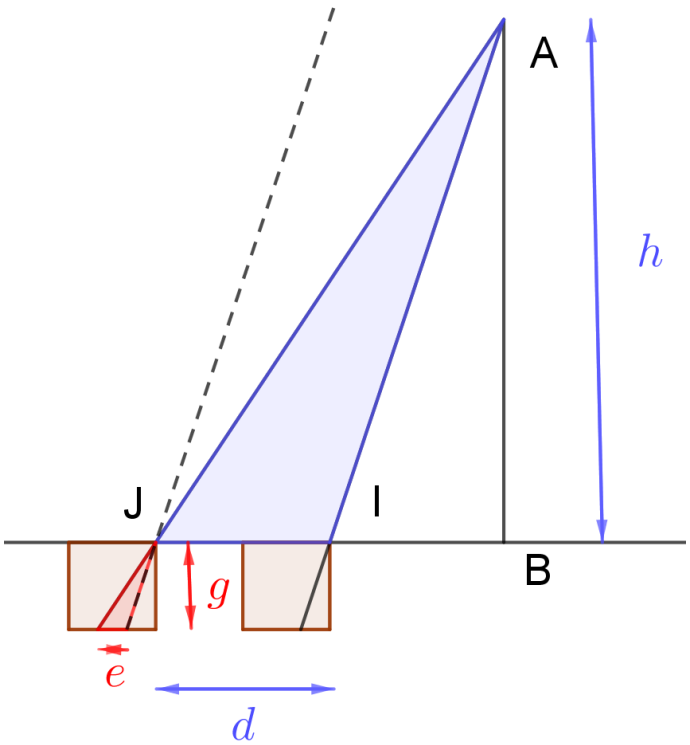
L’astrolabe est un instrument des Grecs … Al Biruni, éléments d’astrologie, p. 194



le pilastre, l’alidade : ألعضادة

Aider, assister, fortifier : عضد

Mesurer avec l'astrolabe



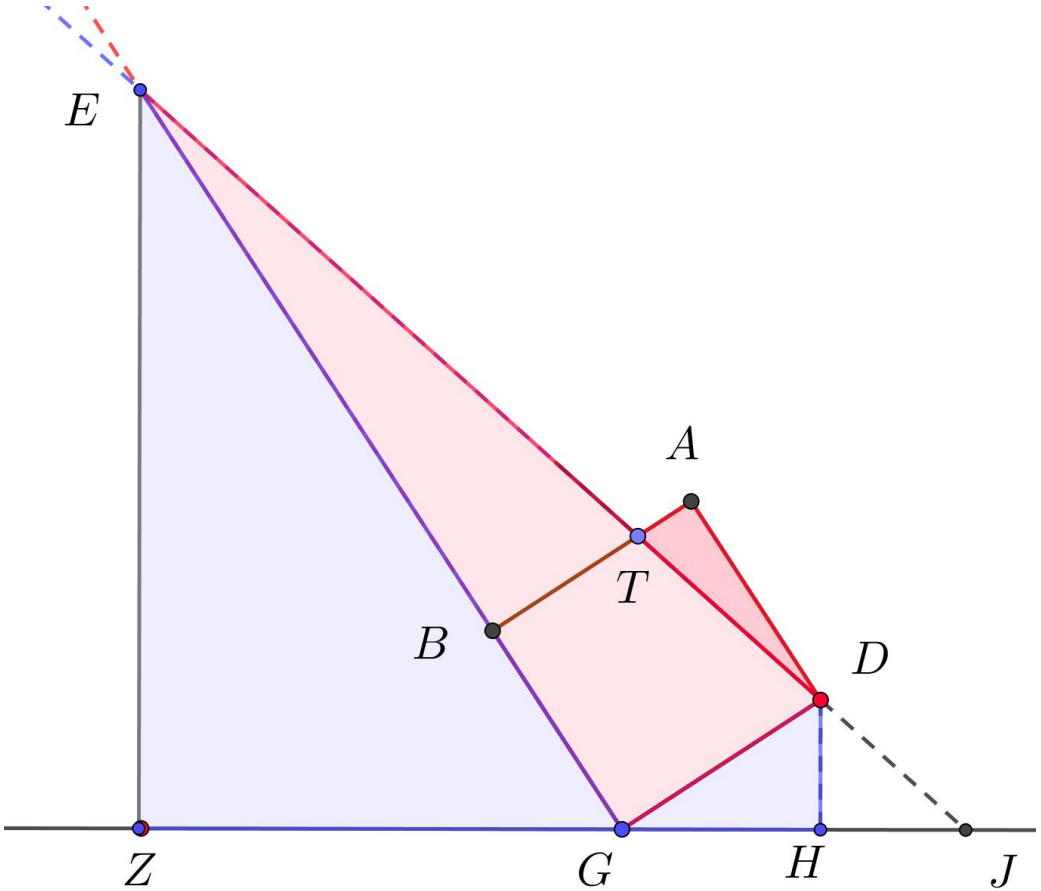
$$\frac{AB}{IJ} = \frac{g}{e} \qquad h = d\,\frac{g}{e}$$

$g = 12 \qquad e = 1$

Pour trouver la hauteur d'un minaret, d'une colonne ou d'une montagne dont la base est inaccessible, reste d'abord là où tu es, et tourne la règle jusqu'à ce que tu voies le sommet par les deux viseurs, exactement comme tu le fais pour prendre la hauteur d'une étoile, note alors le nombre de doigts auquel pointe la règle dans le carré des ombres, et déplace-toi vers l'avant ou vers l'arrière (là où le sol est le plus plat), si c'est vers l'avant place la pointe de la règle à un doigt de moins, si c'est vers l'arrière, à une graduation de plus, et marche jusqu'à ce que le sommet soit de nouveau visible à travers les deux viseurs. La distance entre les deux points d'observation multipliée par 12 est la hauteur de la montagne,

Biruni, *Eléments d'astrologie p. 346*

double visée, simple station



$$\frac{ZE}{EG} = \frac{HG}{GD}$$

$$\frac{EG}{GD} = \frac{DA}{AT}$$

$$\frac{ZE}{GD} = \frac{HG.DA}{GD.AT}$$

$$ZE = \frac{HG.DA}{AT}$$

1031 *Détermination des Coordonnées…* , trad. Ali Jamil 1967, p. 188
Commentaires de Kennedy, 1873 p. 140

Abd ar Rahman AS SUFI

Téhéran 903-Chiraz 986

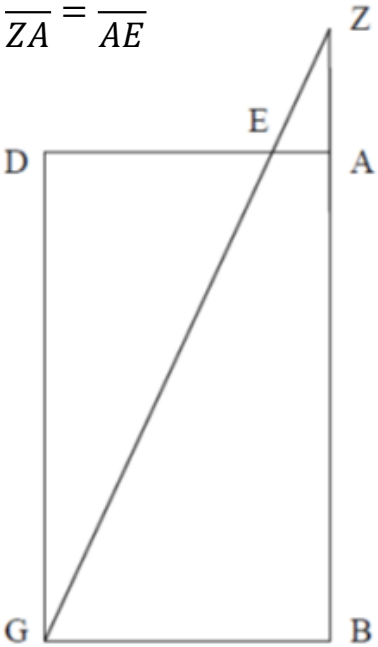
- Astronome,
- traduit l'Almageste de Ptolémée en arabe
- Découvre la galaxie d'Andromède
- exploite et améliore l'astrolabe
- Laisse un travail de recension méticuleux dans des documents de grande qualité esthétique

Livre des étoiles fixes

AS SUFI

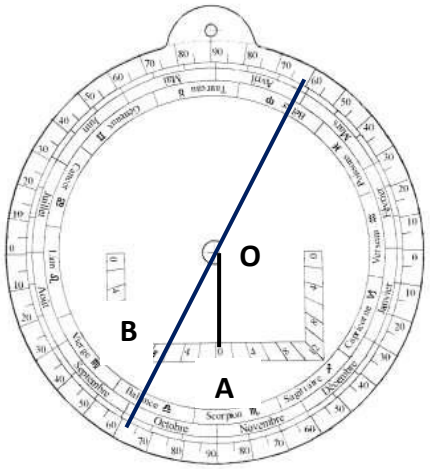
L'Epître sur l'utilisation de l'astrolabe

$$\frac{ZB}{ZA} = \frac{AD}{AE}$$



AS SUFI
au lycée Branly de Créteil

Sur l'astrolabe ci-contre, chaque côté du carré des ombres est gradué de 0 à 12. En tenant l'astrolabe verticalement devant les yeux, on vise à l'aide de l'alidade. Le rôle du carré des ombres est alors de donner la tangente de l'angle de visée



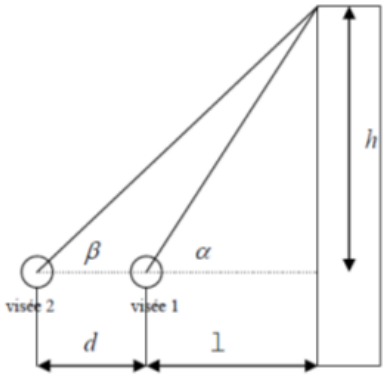
1) Pour la visée ci-contre, l'alidade est sur la graduation horizontale 6. Les graduations horizontales sont nommées "ombres droites", car on peut considérer que AB est l'ombre d'un bâton droit OA, donnée par le Soleil situé dans l'axe de l'alidade. Calculer dans ce cas $tan\widehat{\mathrm{OBA}}$.

Supposons qu'à la visée 1, l'alidade soit sur la graduation 6 des ombres droites et qu'à la visée 2, elle soit sur la graduation 7.

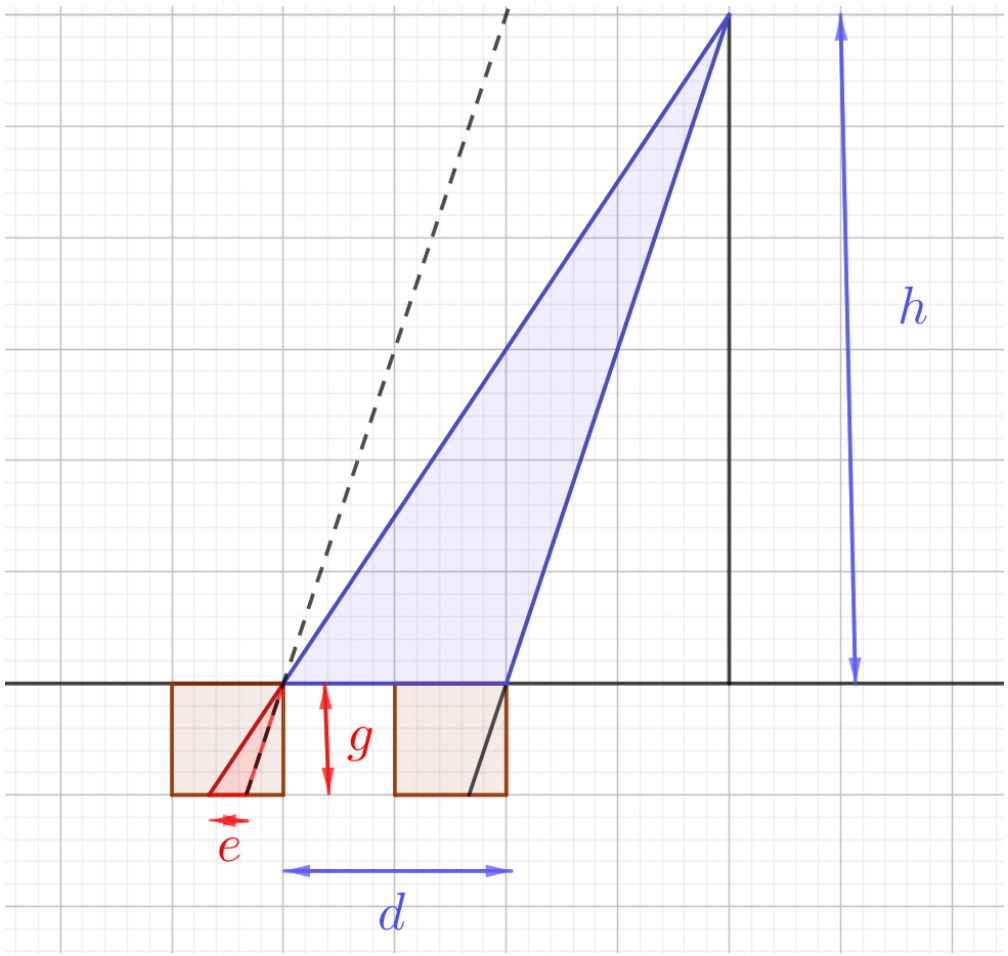
2) Exprimer *tan α* et *tan β* en fonction de *h*, l et *d*.

3) Montrer que h = 12xd.

C'est le résultat donné par AS SUFI



L'Epître sur l'utilisation de l'astrolabe



$g = 12$; $e = 1$

$$\frac{h}{d} = \frac{g}{e} = 12$$

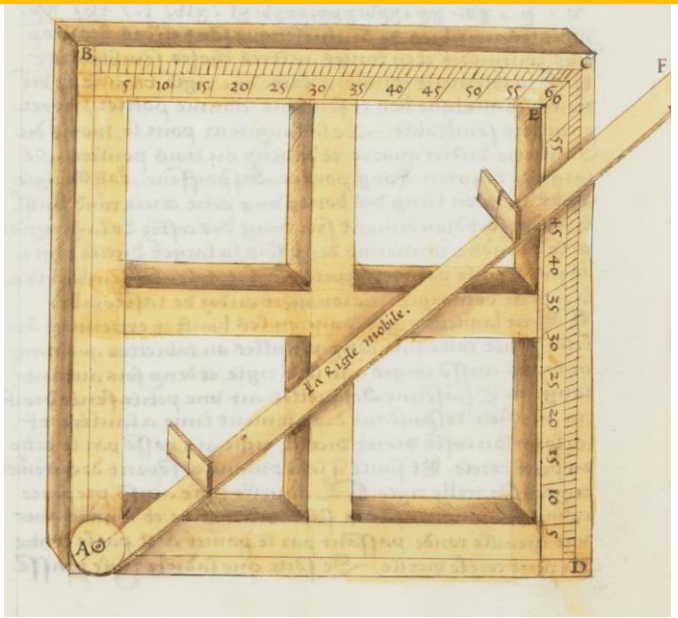
Dans les traités de géométrie pratique occidentaux :

l’intervention progressive des angles et des lignes trigonométriques

ORONCE FINE (1494-1555)

Composition et usage du carré géométrique [1538]

Offert à François 1er par Oronce Fine, lecteur ordinaire du dit seigneur es sciences mathématiques en l'université de Paris



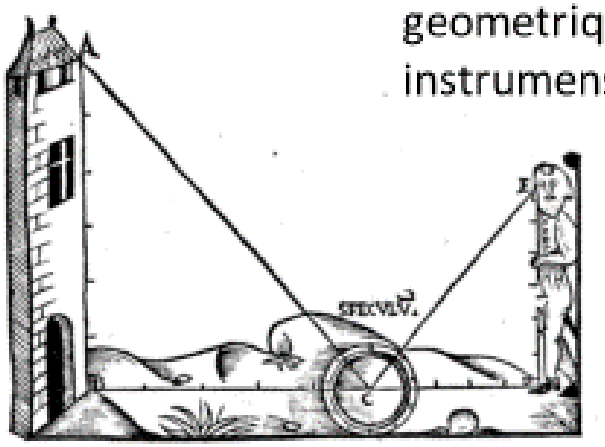
Document disponible sur gallica

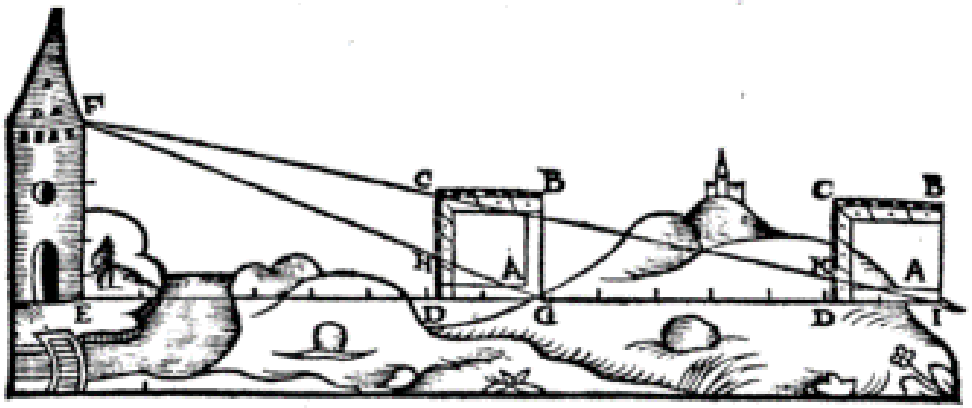
Une géométrie militaire ?

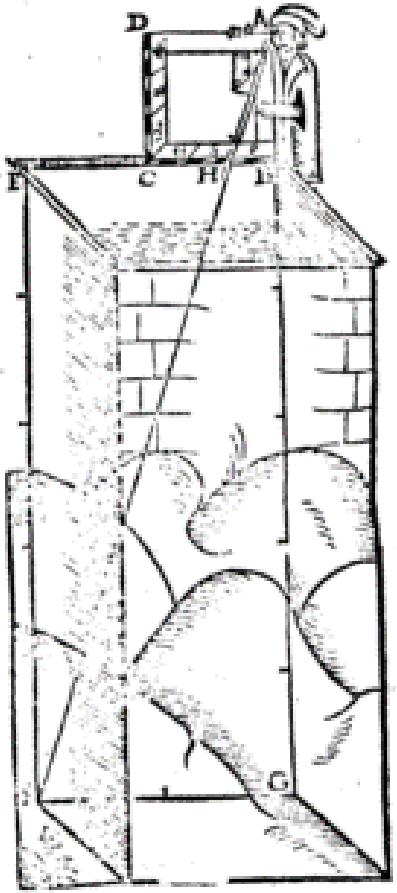
Et qui plus est sans que l'on erre
On peut mesurer sur la terre
Toutes les haulteurs qui de trenchees
Ou de fossez sont empechees
Qui sert beaucoup en temps de guerre

ORONCE FINE 1585

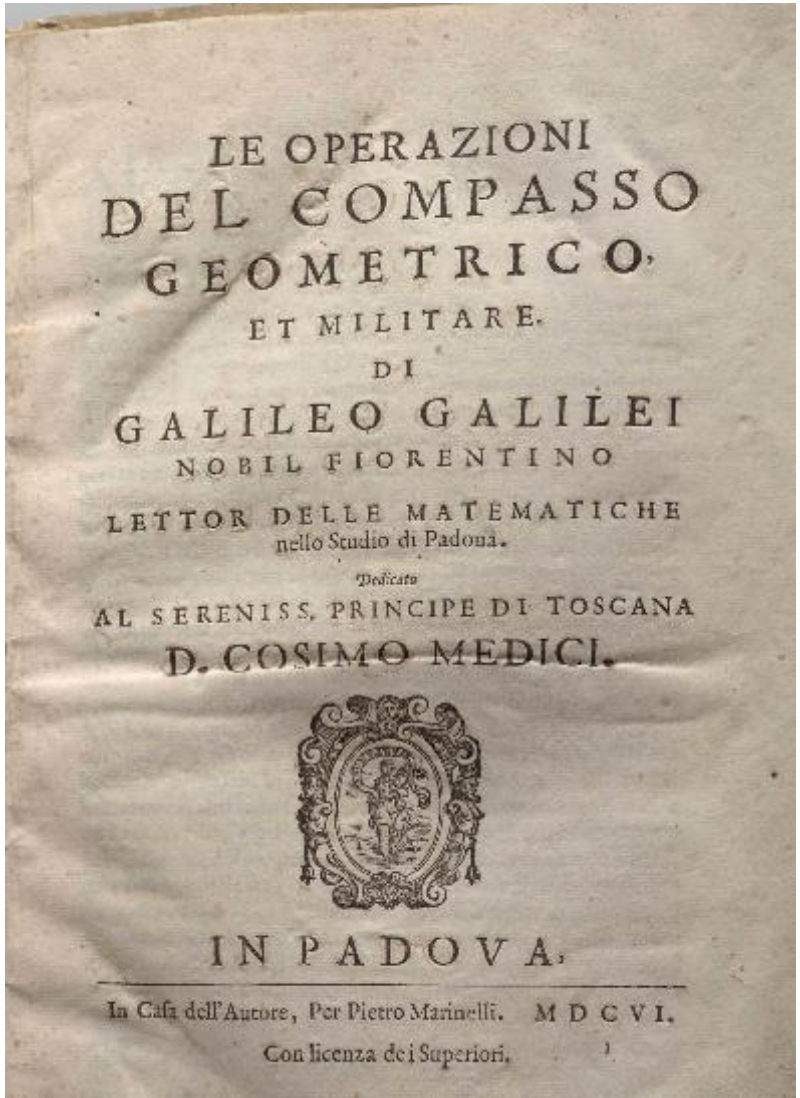
La practique de la geometrie d'Oronce, professeur du roy és mathématiques, en laquelle est compris l'usage du quarré geometrique, & de plusieurs autres instrumens servans à mesme effect







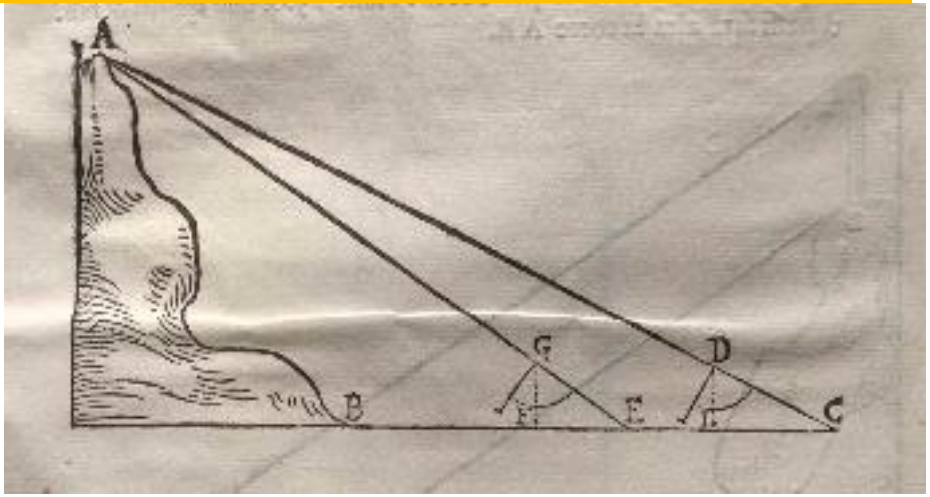
GALILÉE 1606 : intervention des angles ?

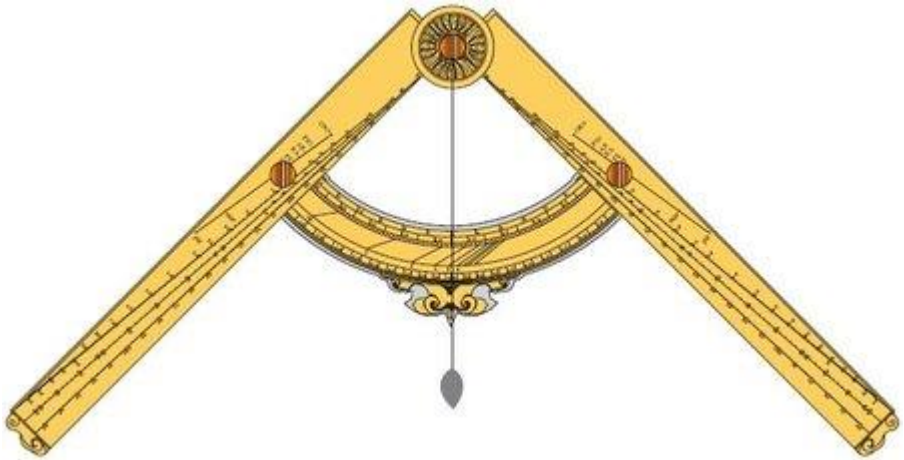


LE OPERAZIONI
DEL COMPASSO
GEOMETRICO,
ET MILITARE.
DI
GALILEO GALILEI
NOBIL FIORENTINO
LETTOR DELLE MATEMATICHE
nello Studio di Padoua.
Dedicato
AL SERENISS. PRINCIPE DI TOSCANA
D. COSIMO MEDICI.

IN PADOVA,

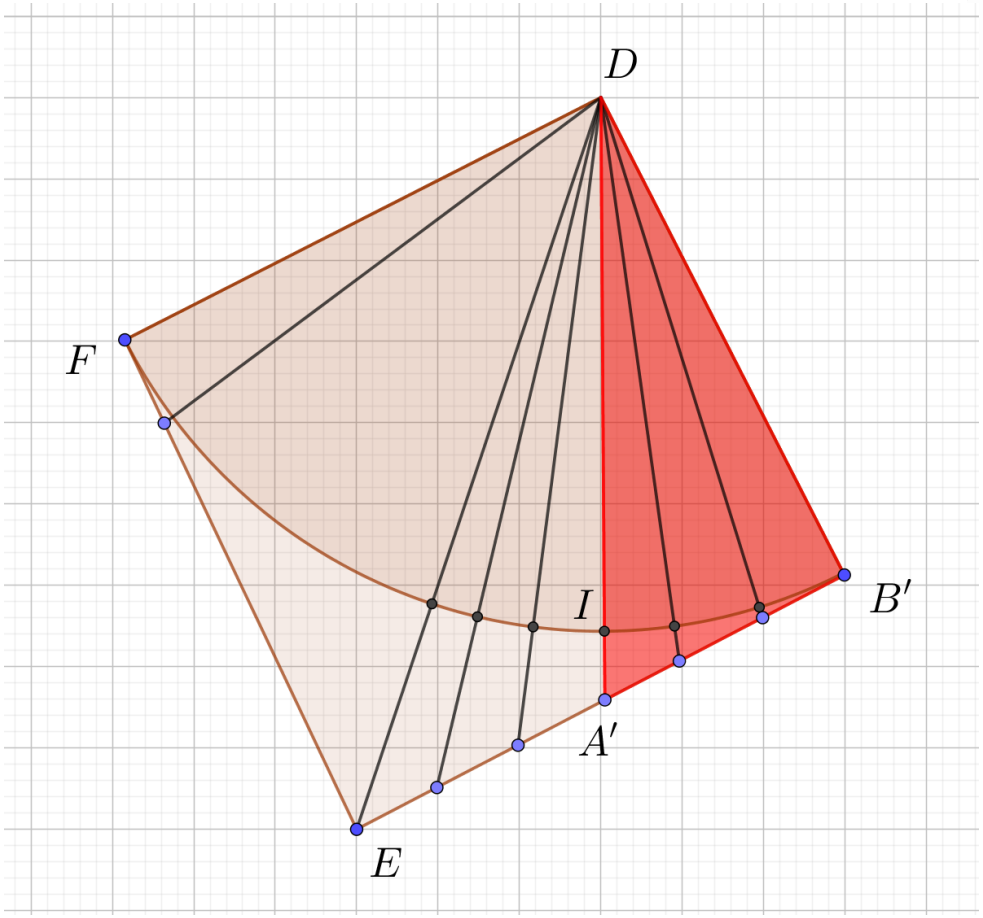
In Casa dell'Autore, Per Pietro Marinelli. M D C V I.
Con licenza de i Superiori.

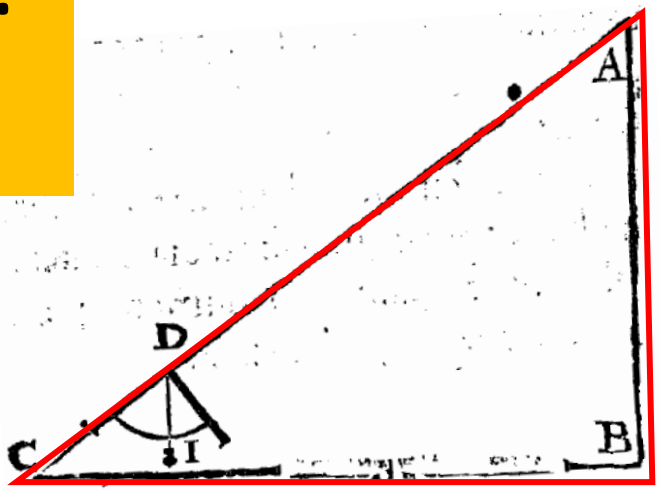


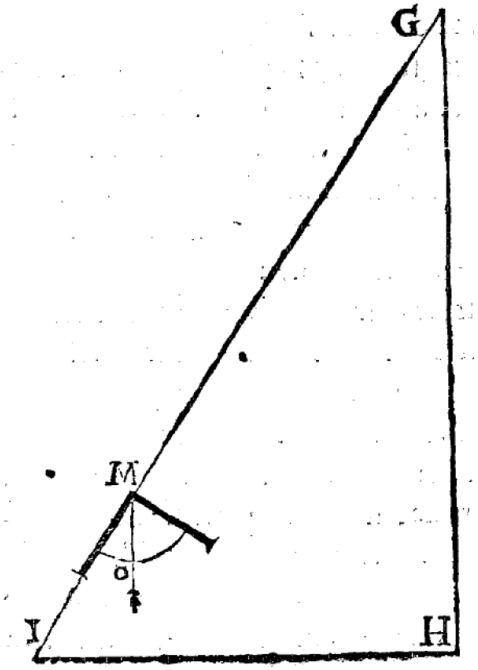


Le compas de Galilée :

les deux cas de figure et le « carré virtuel »



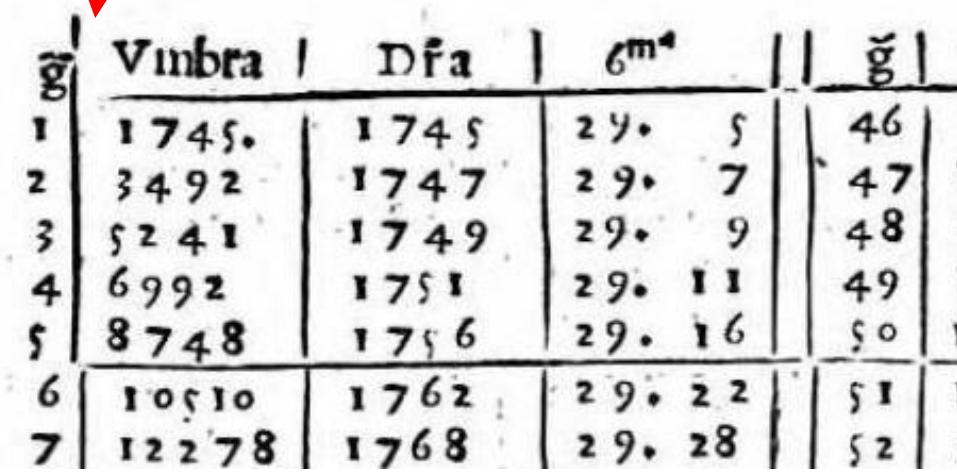




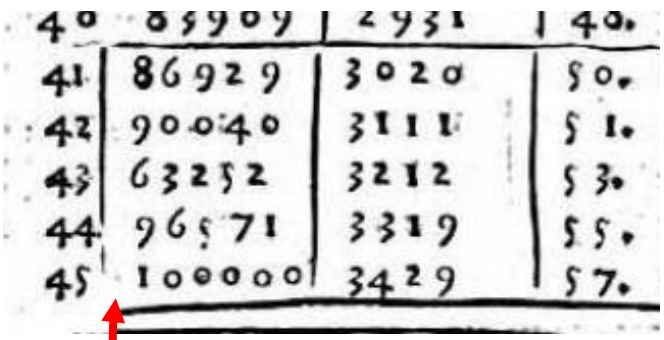
Francesco Maurolico,
(1558) : table des ombres

TABELLA FOECVNDA.

g	Vmbra	Dfa	6m4	g	Vmbra	Dfa	6m4
1	1745.	1745	29. 5	46	103551	3551.	59. 11
2	3492	1747	29. 7	47	107236	3685.	61. 25
3	5241	1749	29. 9	48	111062	3826.	63. 46
4	6992	1751	29. 11	49	115037	3975.	66. 15
5	8748	1756	29. 16	50	119197	4160.	69. 20
6	10510	1762	29. 22	51	123491	4294	71. 34
7	12278	1768	29. 28	52	127994	4503	75 5
8	14053	1775	29. 35	53	132704	4710	78. 30
9	15838	1785	29. 45	54	137639	4935	82. 15
10	17633	1795	29. 55	55	142813	5174	86. 14
11	19439	1806	30. 6	56	148253	5440	90. 40
12	21256	1817	30. 17	57	153987	5734	95. 34
13	23087	1831	30. 31	58	160033	6046	100.46
14	24932	1845	30. 45	59	166429	6396	106.36
15	26794	1862	31. 2	60	173205	6776	112.56
16	28674	1880	31. 20	61	180405	7200	120. 0
17	30573	1899	31. 39	62	188073	7668	127.48
18	32492	1919	31. 59	63	196261	8188	136.28
19	34433	1941	32. 21	64	205030	8769	146. 9
20	36396	1963	32. 43	65	214451	9421	157. 1
21	38387	1991	33. 11	66	224603	10152	169. 12
22	40402	2015	33. 35	67	235585	10982	183. 2
23	42448	2046	34. 6	68	247509	11924	198.44
24	44522	2074	34. 34	69	260509	13000	216. 40
25	46631	2109	35. 9	70	274747	14238	237.18
26	48772	2141	35. 41	71	290421	15674	261. 14
27	50952	2180	36. 20	72	307768	17347	289. 7
28	53170	2218	36. 58	73	327084	19316	321. 56
29	55432	2262	37. 42	74	348742	21658	360. 58
30	57735	2303	38. 23	75	373205	24463	407. 43
31	60086	2351	39. 11	76	401078	27873	464. 33
32	62486	2400	40. 0	77	433148	32070	534. 30
33	64940	2454	40. 54	78	470453	37305	621. 45
34	67452	2512	41. 51	79	514455	44002	733. 22
35	70022	2570	42. 50	80	567128	52673	877. 53
36	72654	2632	43. 52	81	631375	64247	1070. 47
37	75356	2702	45. 2	82	711537	80162	1336. 2
38	78129	2773	46. 13	83	814435	102898	1714. 18
39	80978	2849	47. 29	84	951436	137001	2283. 21
40	83909	2931	48. 51	85	1143005	191569	3192. 49
41	86929	3020	50. 20	86	1430067	287062	4784. 22
42	90040	3111	51. 51	87	1908113	478046	7967. 26
43	63252	3212	53. 52	88	2863625	955512	15925. 12
44	96571	3319	55. 19	89	5728995	2865370	47756. 10
45	100000	3429	57. 9	90	Infinitum.	Infinitum.	Infinitum.



g	Vmbra	Dfa	6m4	g
1	1745.	1745	29. 5	46
2	3492	1747	29. 7	47
3	5241	1749	29. 9	48
4	6992	1751	29. 11	49
5	8748	1756	29. 16	50
6	10510	1762	29. 22	51
7	12278	1768	29. 28	52

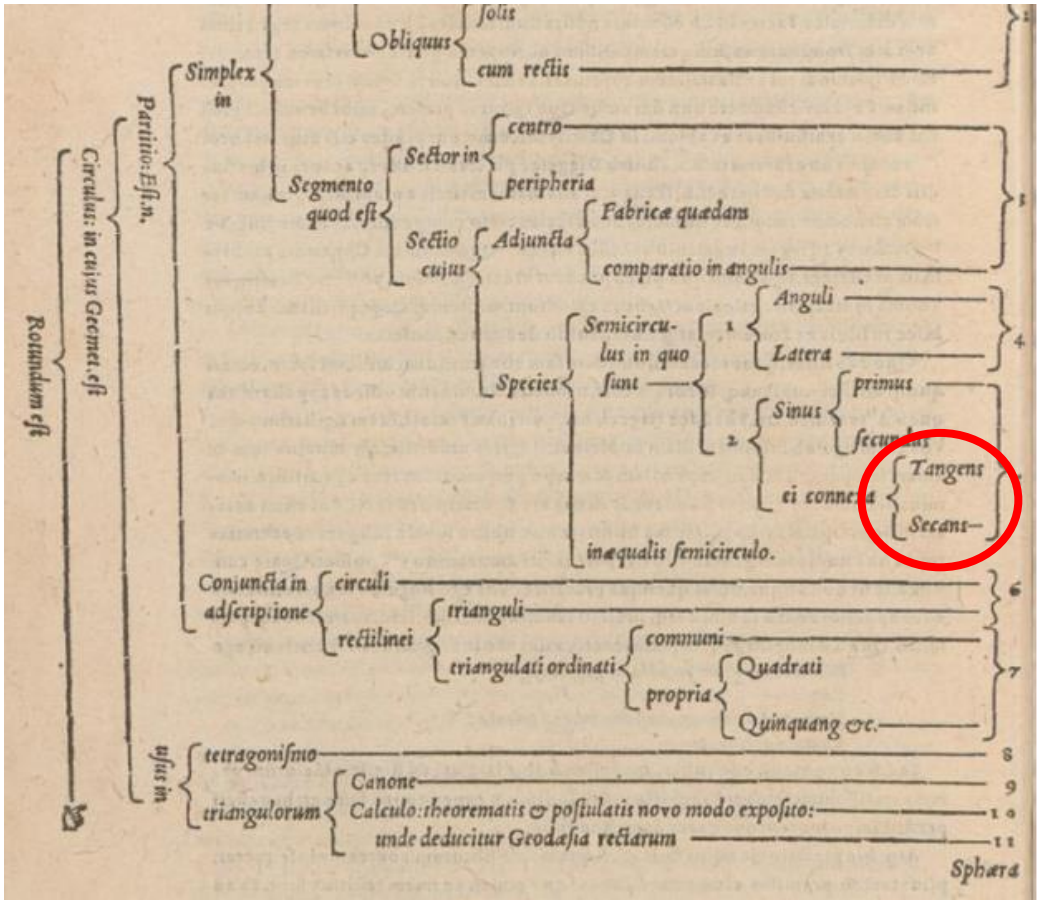


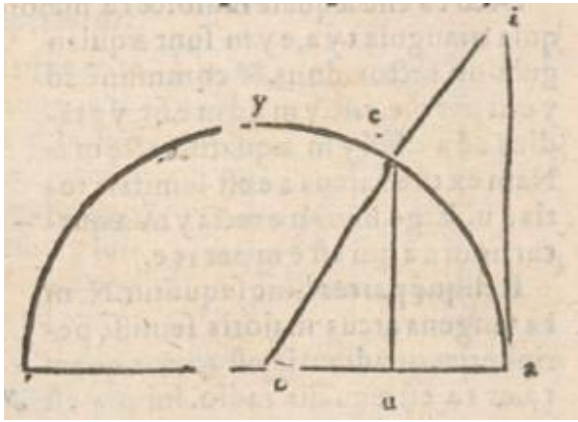
40	83909	2931	48.
41	86929	3020	50.
42	90040	3111	51.
43	63252	3212	53.
44	96571	3319	55.
45	100000	3429	57.

FINKE Thomas (1583) *Geometria Rotundi* :

l'apparition du terme « *tangente* »

22. *Tangens est à termino peripheriæ altero perpendicularis in radium extra per reliquum terminum continuatum.*





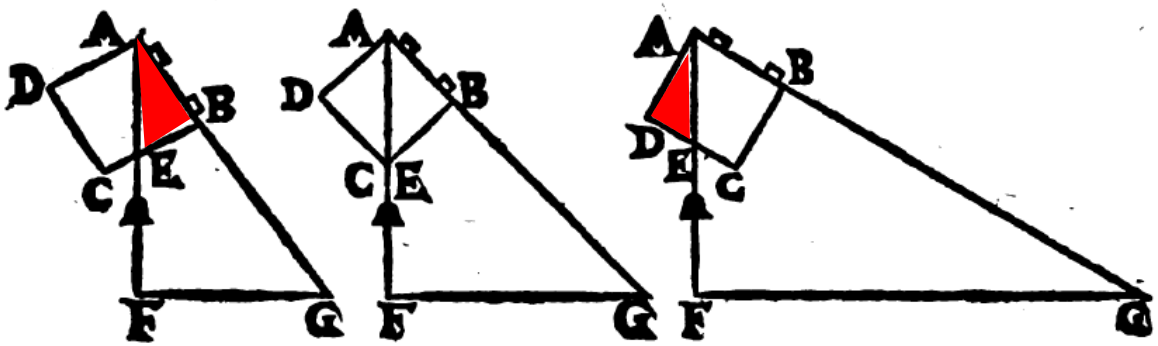
$$\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}$$

Christophorus Clavius (1538-1612)

GEOMETRIA
PRACTICA.

Cum gratia & Priuilegio Sac. Cæs. Maiestat.
Superiorum Permissu.

MOGVNTIÆ,
Ex Typographeo IOANNIS ALBINI.



$$\frac{AB}{BE} = \frac{AF}{FG} \qquad \frac{DE}{DA} = \frac{AF}{FG}$$

Vt latus AB, partium 1000. ad umbram rectam abscissam BE, Ita altitudo nota AF, ad FG, distantiam,

Vt umbra versa abscissa DE, ad latus DA, partium 1000. Ita altitudo nota AF, ad FG, distantiam.

Clavius, 1606

Le gnomon est le sinus total

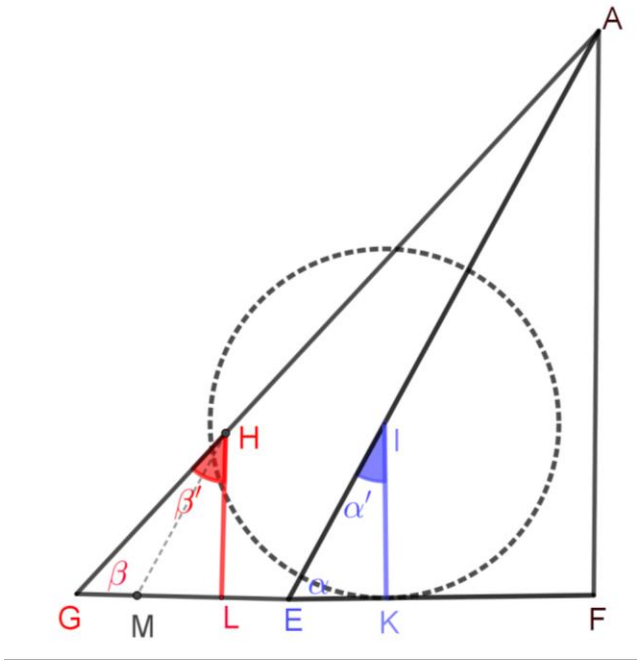
R = HL = KI = sinus total

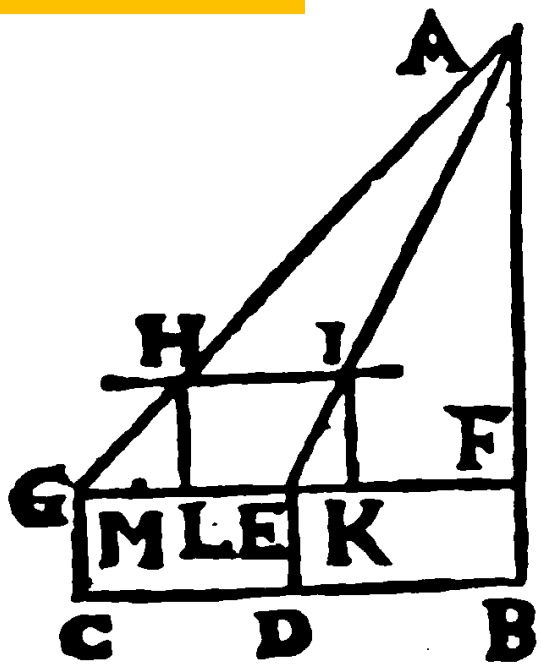
$_R tan\alpha' =$ EK

$_R tan\beta' =$ GL

$_R tan\beta'$ - $_R tan\alpha'$ = GM

$$\frac{GM}{GE} = \frac{LH}{FA}$$





Vt GM, differentia Tangentium GL, EK, complementorum angulorum obſeruationum, ad GE, differentiam ſtationum, ita LH, ſinus totus, ad FA,

GM, différence des tangentes des compléments des angles observés,

est à GE, distance des stations

comme LH, le sinus total, est à FA

Clavius 1606 p. 57

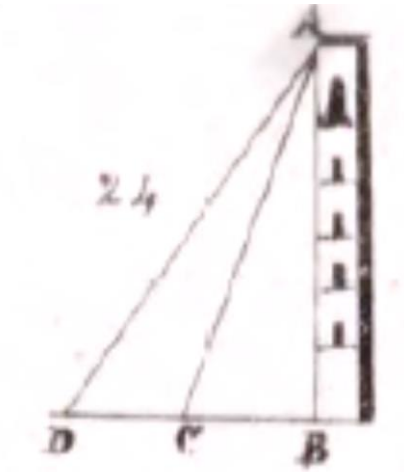
MASCHERONI 1799

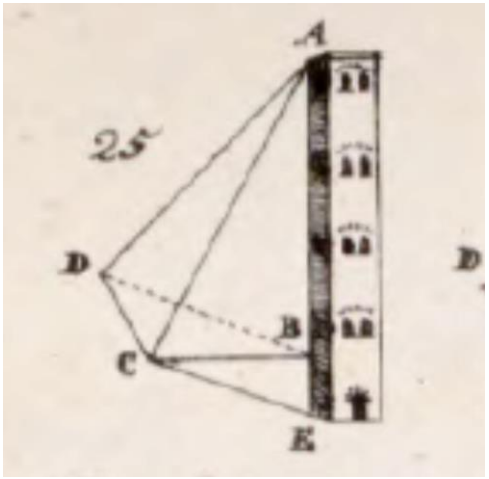
Si l'on se propose de déterminer la hauteur inaccessible AB, en supposant que l'on peut mesurer la partie DC de l'horizontale DB et les angles ADB et ACB, on aura

$$AB = DC \frac{\sin ADC}{\sin DAC} \sin ACB.$$

Si DC ne se mesurant pas sur l'horizontale CB, faisait un angle quelconque avec l'horizon, et si en même temps le plan du triangle ADC n'était pas le même que le plan du triangle vertical ACB, on déterminerait encore AB par la formule

$$AB = DC \frac{\sin ADC}{\sin DAC} \sin ACB.$$





$$\frac{AC}{\sin ADC} = \frac{DC}{\sin DAC} \quad ; \quad AC = \frac{AB}{\sin ACB}$$

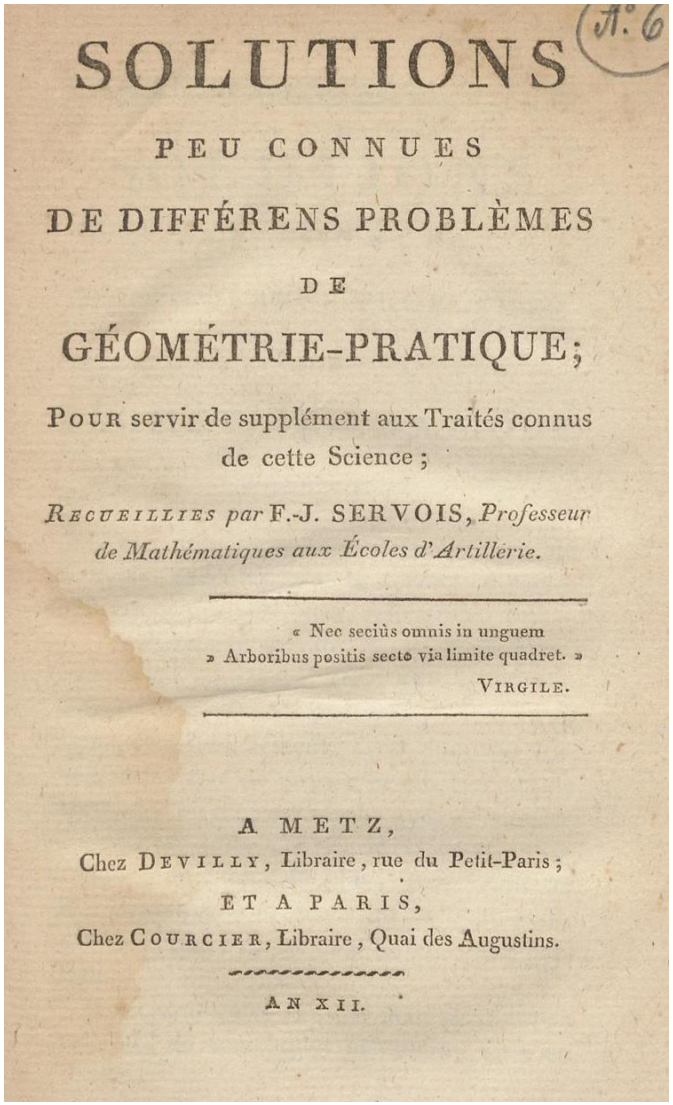
L’époque de la géométrie « linéaire »

Mascheroni se sert presque uniquement de formules trigonométriques dont nous nous refusons l'usage.

De Longchamps, 1890, p. 6

François-Joseph SERVOIS 1801

Il est utile, surtout a la Guerre, de pouvoir executer sur le terrain diverses operations geometriques, telles que, mesurer des distances, prendre des prolongemens, mener des paralleles, etc., sans le secours d'Instrumens de prix, qu'on acquiert et qu'on transporte difficilement. C'est donc un travail utile, que de presenter un Recueil de Methodes ou tout est resolu avec de simples Piquets ou Jalons, avec le Cordeau ou la Chaine, ou, tout au plus, avec l'Equerre d'Arpenteur ; instrument qu'on peut avoir partout, parce qu'on peut le fabriquer partout.



SOLUTIONS

PEU CONNUES

DE DIFFÉRENS PROBLÈMES

DE

GÉOMÉTRIE-PRATIQUE;

POUR servir de supplément aux Traités connus de cette Science ;

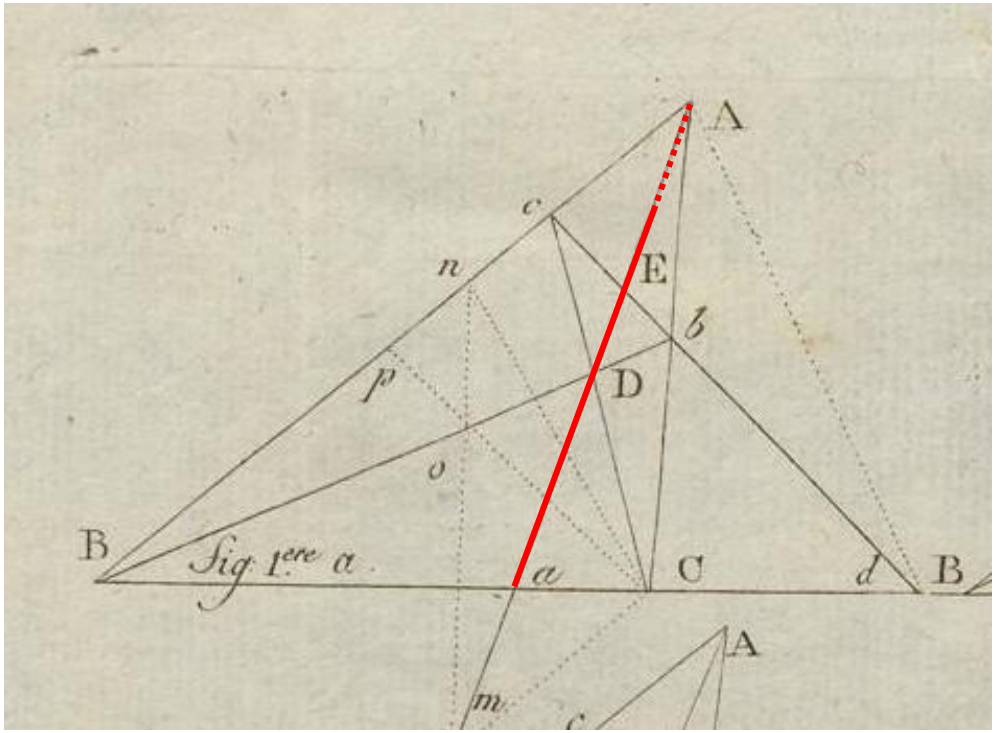
RECUEILLIES par F.-J. SERVOIS, *Professeur de Mathématiques aux Écoles d'Artillerie.*

« Nec seciùs omnis in unguem
» Arboribus positis secto via limite quadret. »
VIRGILE.

A METZ,
Chez DEVILLY, Libraire, rue du Petit-Paris ;
ET A PARIS,
Chez COURCIER, Libraire, Quai des Augustins.

AN XII.

Mesurer une ligne dont une extrémité est inaccessible



Solution.
A*a* est la ligne a mesurer, dont l'extremite A est inaccessible ….
Je mesure la longueur E*a*, en remarquant, en passant, les longueurs *a*D, DE, et j'ai celle de A*a* par l'equation

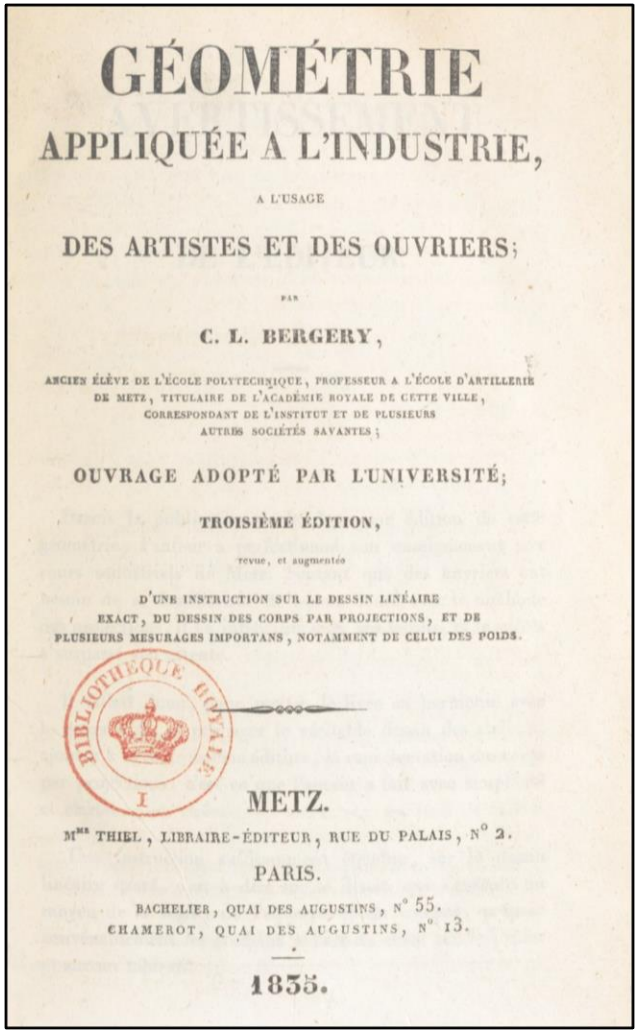
$$\mathrm{A}a = \frac{\mathrm{E}a.\mathrm{D}a}{\mathrm{D}a - \mathrm{DE}}$$

dans le second membre de laquelle tout est connu.

Servois 1801

Claude-Lucien BERGERY 1835

calculer la distance inaccessible et en déduire la hauteur



GÉOMÉTRIE

APPLIQUÉE A L'INDUSTRIE,

A L'USAGE

DES ARTISTES ET DES OUVRIERS;

PAR

C. L. BERGERY,

ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, PROFESSEUR A L'ÉCOLE D'ARTILLERIE DE METZ, TITULAIRE DE L'ACADÉMIE ROYALE DE CETTE VILLE, CORRESPONDANT DE L'INSTITUT ET DE PLUSIEURS AUTRES SOCIÉTÉS SAVANTES;

OUVRAGE ADOPTÉ PAR L'UNIVERSITÉ;

TROISIÈME ÉDITION,

revue, et augmentée

D'UNE INSTRUCTION SUR LE DESSIN LINÉAIRE EXACT, DU DESSIN DES CORPS PAR PROJECTIONS, ET DE PLUSIEURS MESURAGES IMPORTANS, NOTAMMENT DE CELUI DES POIDS.

BIBLIOTHÈQUE ROYALE I

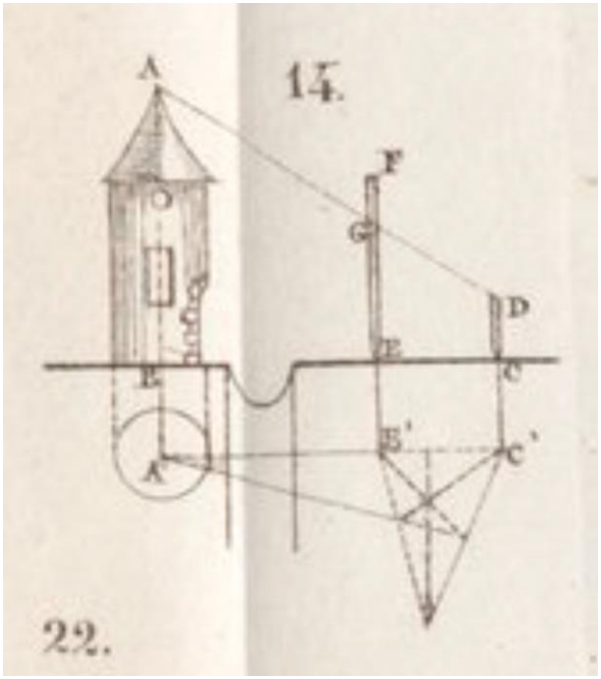
METZ.

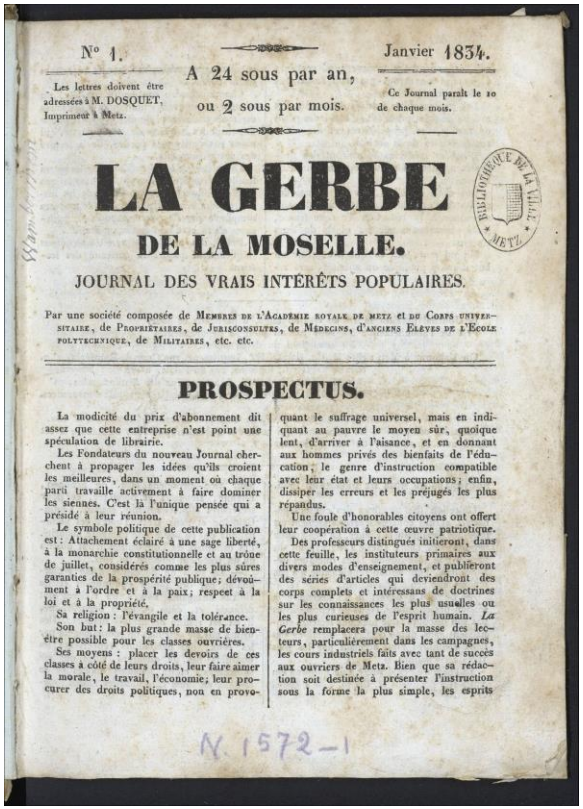
Mme THIEL, LIBRAIRE-ÉDITEUR, RUE DU PALAIS, N° 2.

PARIS.

BACHELIER, QUAI DES AUGUSTINS, N° 55.
CHAMEROT, QUAI DES AUGUSTINS, N° 13.

1835.





N° 1. — Janvier 1834.

Les lettres doivent être adressées à M. DOSQUET, Imprimeur à Metz.

A 24 sous par an, ou 2 sous par mois.

Ce Journal paraît le 10 de chaque mois.

LA GERBE DE LA MOSELLE.

JOURNAL DES VRAIS INTÉRÊTS POPULAIRES.

Par une société composée de MEMBRES DE L'ACADÉMIE ROYALE DE METZ et DU CORPS UNIVERSITAIRE, de PROPRIÉTAIRES, de JURISCONSULTES, de MÉDECINS, d'ANCIENS ÉLÈVES DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, de MILITAIRES, etc. etc.

PROSPECTUS.

La modicité du prix d'abonnement dit assez que cette entreprise n'est point une spéculation de librairie.

Les Fondateurs du nouveau Journal cherchent à propager les idées qu'ils croient les meilleures, dans un moment où chaque parti travaille activement à faire dominer les siennes. C'est là l'unique pensée qui a présidé à leur réunion.

Le symbole politique de cette publication est : Attachement éclairé à une sage liberté, à la monarchie constitutionnelle et au trône de juillet, considérés comme les plus sûres garanties de la prospérité publique; dévoûment à l'ordre et à la paix; respect à la loi et à la propriété.

Sa religion : l'évangile et la tolérance.

Son but : la plus grande masse de bien-être possible pour les classes ouvrières.

Ses moyens : placer les devoirs de ces classes à côté de leurs droits, leur faire aimer la morale, le travail, l'économie; leur procurer des droits politiques, non en provoquant le suffrage universel, mais en indiquant au pauvre le moyen sûr, quoique lent, d'arriver à l'aisance, et en donnant aux hommes privés des bienfaits de l'éducation; le genre d'instruction compatible avec leur état et leurs occupations; enfin, dissiper les erreurs et les préjugés les plus répandus.

Une foule d'honorables citoyens ont offert leur coopération à cette œuvre patriotique.

Des professeurs distingués initieront, dans cette feuille, les instituteurs primaires aux divers modes d'enseignement, et publieront des séries d'articles qui deviendront des corps complets et intéressans de doctrines sur les connaissances les plus usuelles ou les plus curieuses de l'esprit humain. *La Gerbe* remplacera pour la masse des lecteurs, particulièrement dans les campagnes, les cours industriels faits avec tant de succès aux ouvriers de Metz. Bien que sa rédaction soit destinée à présenter l'instruction sous la forme la plus simple, les esprits

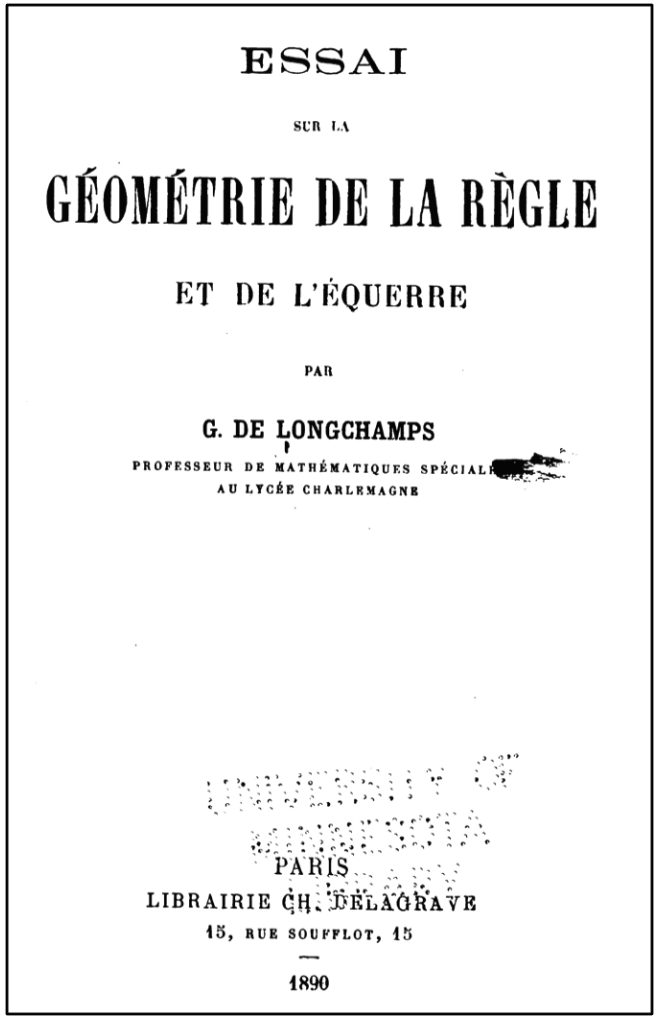
BIBLIOTHÈQUE DE LA VILLE METZ
N. 1572-1

On veut me représenter comme envieux de la gloire de M. Poncelet. Eh ! Mon Dieu ! Je me reconnais à cent piques, à cent mille piques si vous voulez au-dessous de M. Poncelet pour le génie scientifique. Seulement je me crois meilleur professeur que lui et que M. Gosselin lui-même

Gaston de LONGCHAMPS 1890

Avant d'entrer dans notre sujet, une analyse un peu détaillée du livre qui nous paraît se rapprocher le plus de celui que nous allons écrire fera mieux connaître la portée de celui-ci, l'intérêt qu'il comporte et le but que nous nous sommes posé ; l'ouvrage auquel nous venons de faire allusion est dû à Servois. […]

Pour résoudre ces différents problèmes, Servois accorde les jalons, l'équerre d'arpenteur, le cordeau et la chaîne. Mais à propos de ce dernier instrument, il dit : « le chaîner, s'il est permis de s'exprimer ainsi, exige beaucoup de temps et de soin ; tandis qu'on peut toujours prendre des alignements avec exactitude et célérité ». C'est pour ce motif qu'il propose, très sagement à notre avis, de multiplier les alignements, en diminuant les chaînages. [p. 2-3]



ESSAI

SUR LA

GÉOMÉTRIE DE LA RÈGLE

ET DE L'ÉQUERRE

PAR

G. DE LONGCHAMPS

PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

AU LYCÉE CHARLEMAGNE

PARIS

LIBRAIRIE CH. DELAGRAVE

15, RUE SOUFFLOT, 15

1890

LONGCHAMPS : les hauteurs

Chapitre XI. LE POINT INACCESSIBLE DANS L'ESPACE.
La hauteur de la tour. - La méthode du miroir. Le rayon de la tour ; solutions diverses. – La hauteur du mât. - Le cas de la tour dont le pied est inaccessible. - La tour rectangulaire. - Solution générale de la détermination des hauteurs. - La hauteur de la montagne. - Le problème du tunnel. - La hauteur du ballon. - Le problème du ballon captif. - La vitesse du ballon mobile. - La hauteur du nuage au-dessus de l'horizon. - La hauteur du nuage au-dessus de la terre. - Hauteur et vitesse des étoiles filantes.

La double station

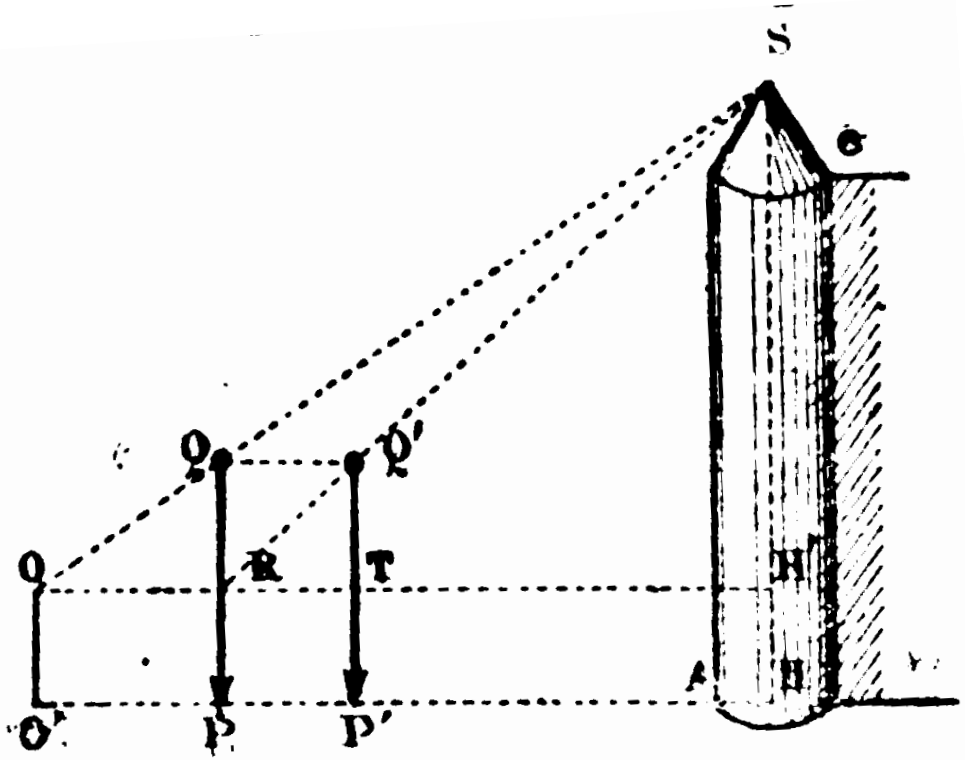


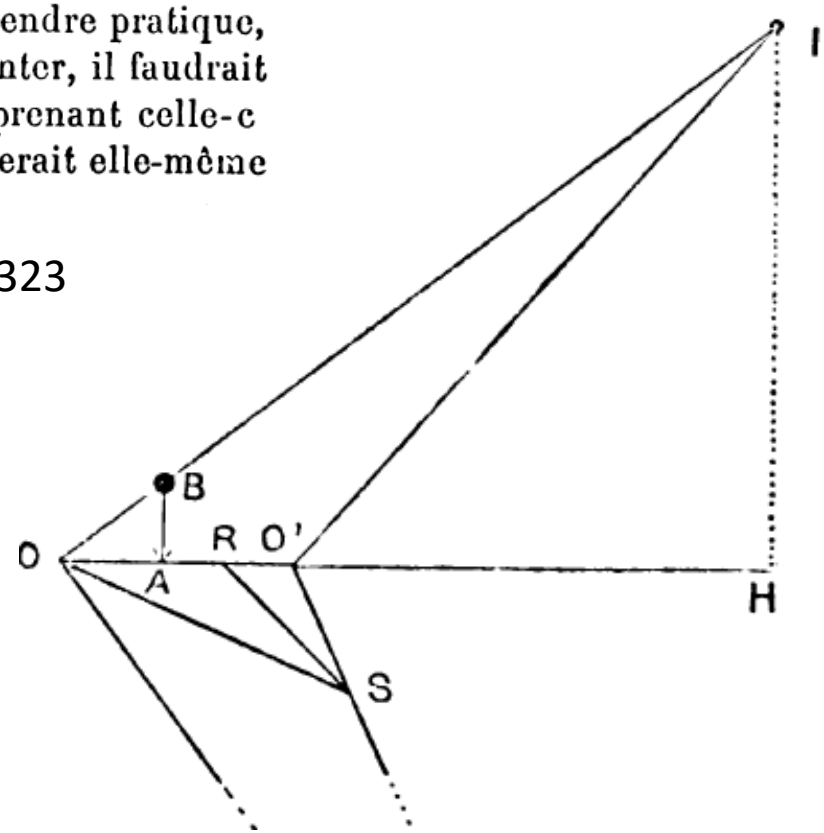
Fig. 309.

Longchamps, Le problème de la tour, p. 314

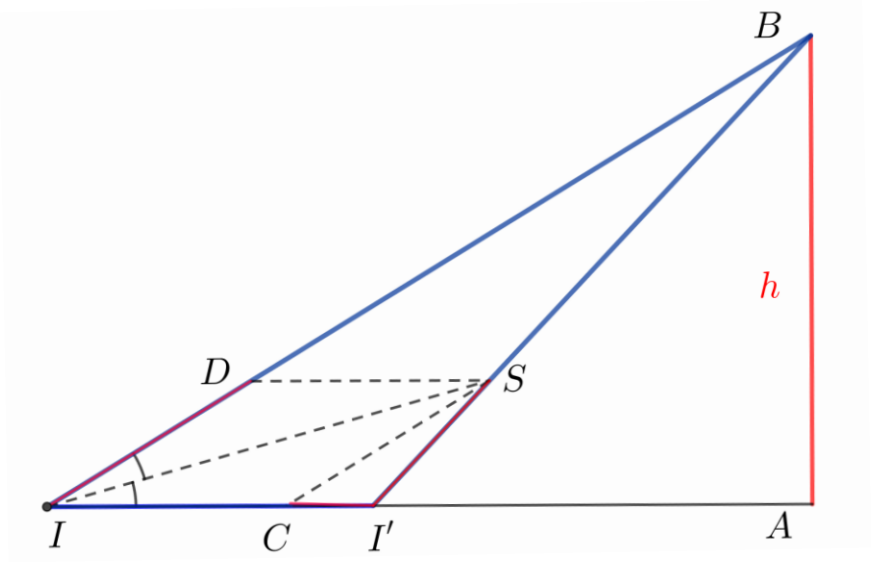
Une « solution générale »

129. — Détermination des hauteurs; solution générale. — Avant d'aller plus loin, dans ce sujet, nous voulons indiquer ici une solution qui nous paraît, également bien, applicable aux grandes ou aux petites hauteurs et que nous appellerons *la solution générale*. Pour la rendre pratique, dans les différents cas qui pourraient se présenter, il faudrait seulement modifier la base d'opérations, en prenant celle-c d'autant plus grande que la hauteur observée serait elle-même plus considérable.

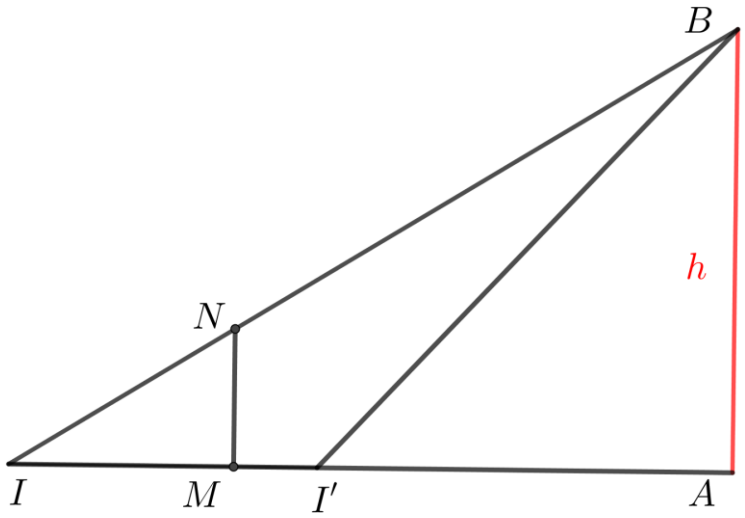
Longchamps, p. 323



Solution générale



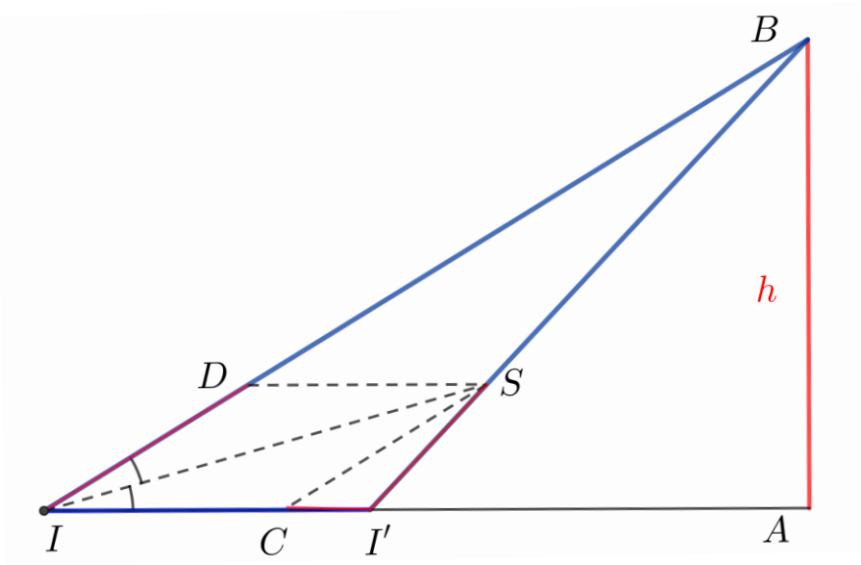
1/ $$\frac{1}{IB} = \frac{1}{IC} - \frac{1}{II'}$$



2/ $$\begin{cases} \dfrac{h}{MN} = \dfrac{IB}{IN} \\ h = MN.\dfrac{IB}{\sqrt{IM^2 + MN^2}} \end{cases}$$

p. 324

Solution générale



$$\frac{ID}{IB} = \frac{CI'}{II'}$$

$$\frac{1}{IB} = \frac{CI'}{IC.II'}$$

$$\frac{1}{IB} = \frac{II' - IC}{IC.II'}$$

38. La table des inverses. — Imaginons le tableau suivant dans lequel la colonne désignée par N renferme la suite naturelle des nombres entiers ; tandis que, en regard de ces nombres, et dans la colonne I, sont écrits leurs inverses.

N	I	N	I	N	I
2	0,5	68	0,01470	.	.
3	0,3*	69	0,01449	.	.
4	0,25	.	.	.	.
5	0,2	.	.	.	.
6	0,16*	.	.	.	.
7	0,14285	77	0,012987	227	0,00440
.	.	.	.	328	0.00438
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
33	$0,\overline{03}$	93	0,010752	.	.

$$\frac{1}{IB} = \frac{1}{IC} - \frac{1}{II'}$$

$$h = MN.\frac{IB}{\sqrt{IM^2 + MN^2}}$$

La hauteur de la montagne

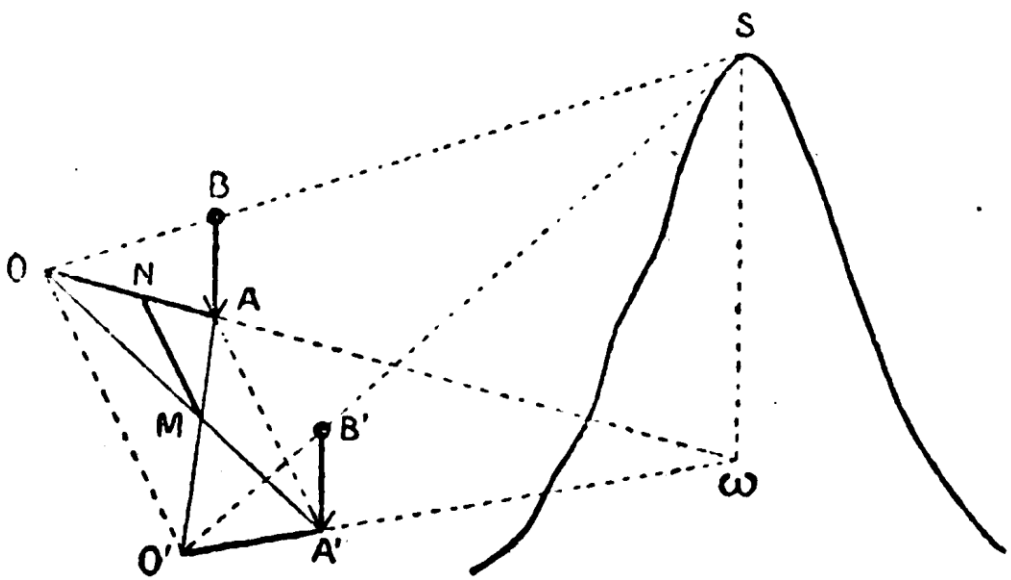


Fig. 321.

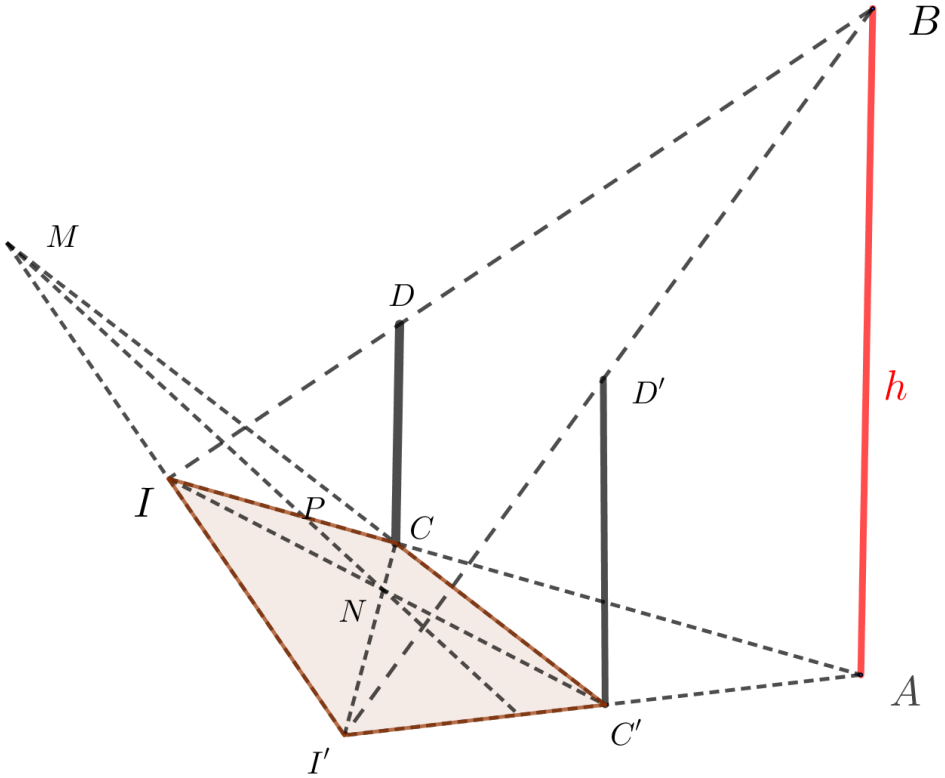
Deux mires verticales de même hauteur, sont situées en AB et A'B'……

Plaçons en M un jalon, en ligne droite avec OA', d'une part, et avec O'A, d'autre part ; puis, par M, traçons MN parallèle à O O'.
La ponctuelle O, N, A, ω est harmonique…

$$S\omega = AB - \frac{NO}{NO - NA}$$

p. 325

La hauteur de la montagne



Le problème de la montagne si les mires ne sont pas de même hauteur

$$h = DC\frac{IA}{IC}$$

$$\frac{PI}{PC} = \frac{AI}{AC} = \frac{AI}{AI - CI}$$

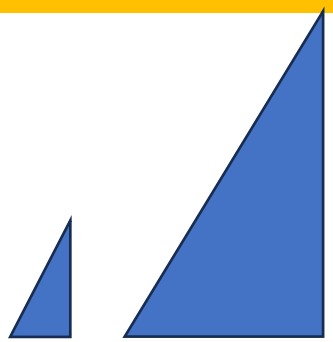
$$PI.AI - PI.CI = PC.AI$$

$$(PI - PC)AI = PI.CI$$

$$h = DC\frac{PI}{PI - PC}$$

Bilan : principes et instruments

comparaison des triangles



Gnomon, carré géométrique, carré des ombres, bâton de Jacob, chaîne…

recours aux angles puis aux lignes et tables trigonométriques

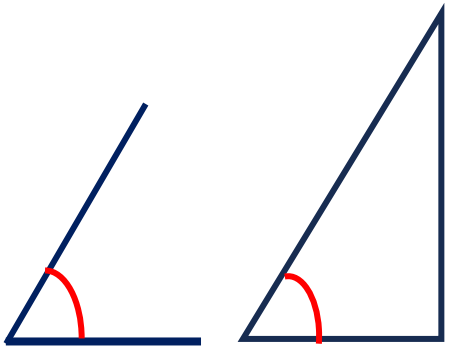
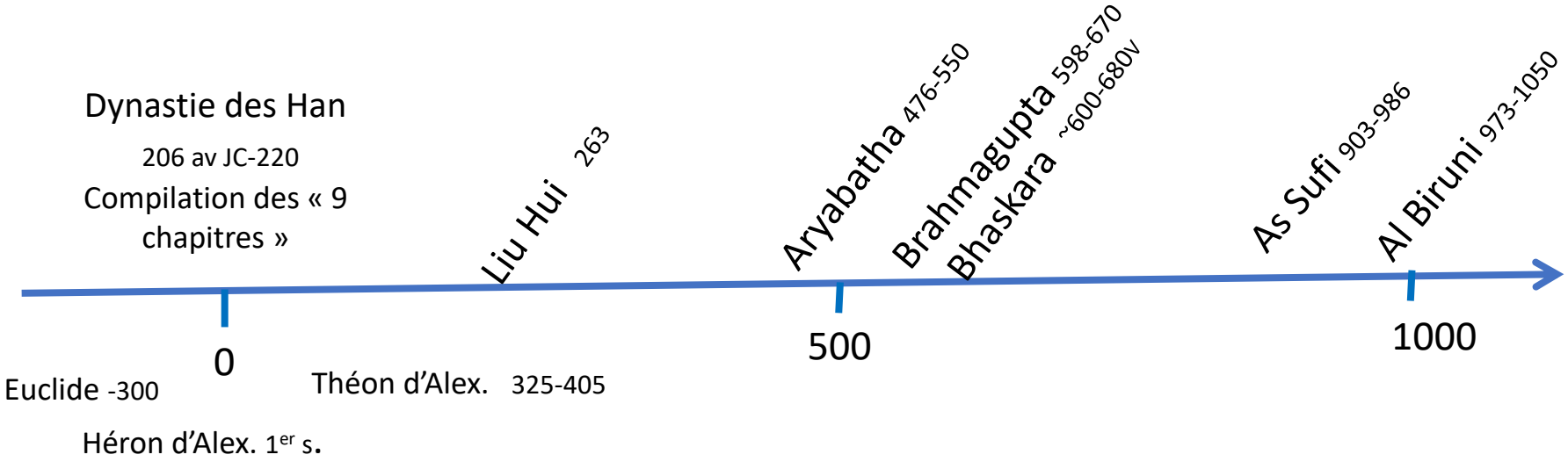


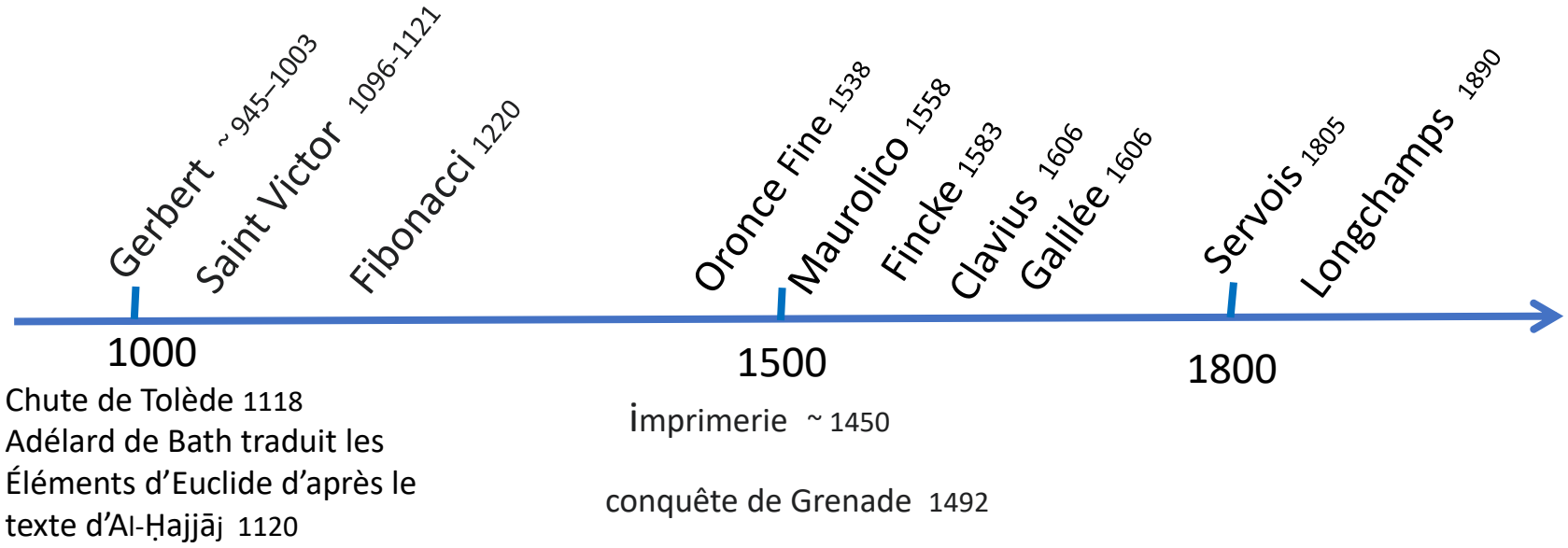
Table trigonométrique, demi-cercle à pinnules, graphomètre, rapporteur, chaîne ….

utilisation des divisions harmoniques

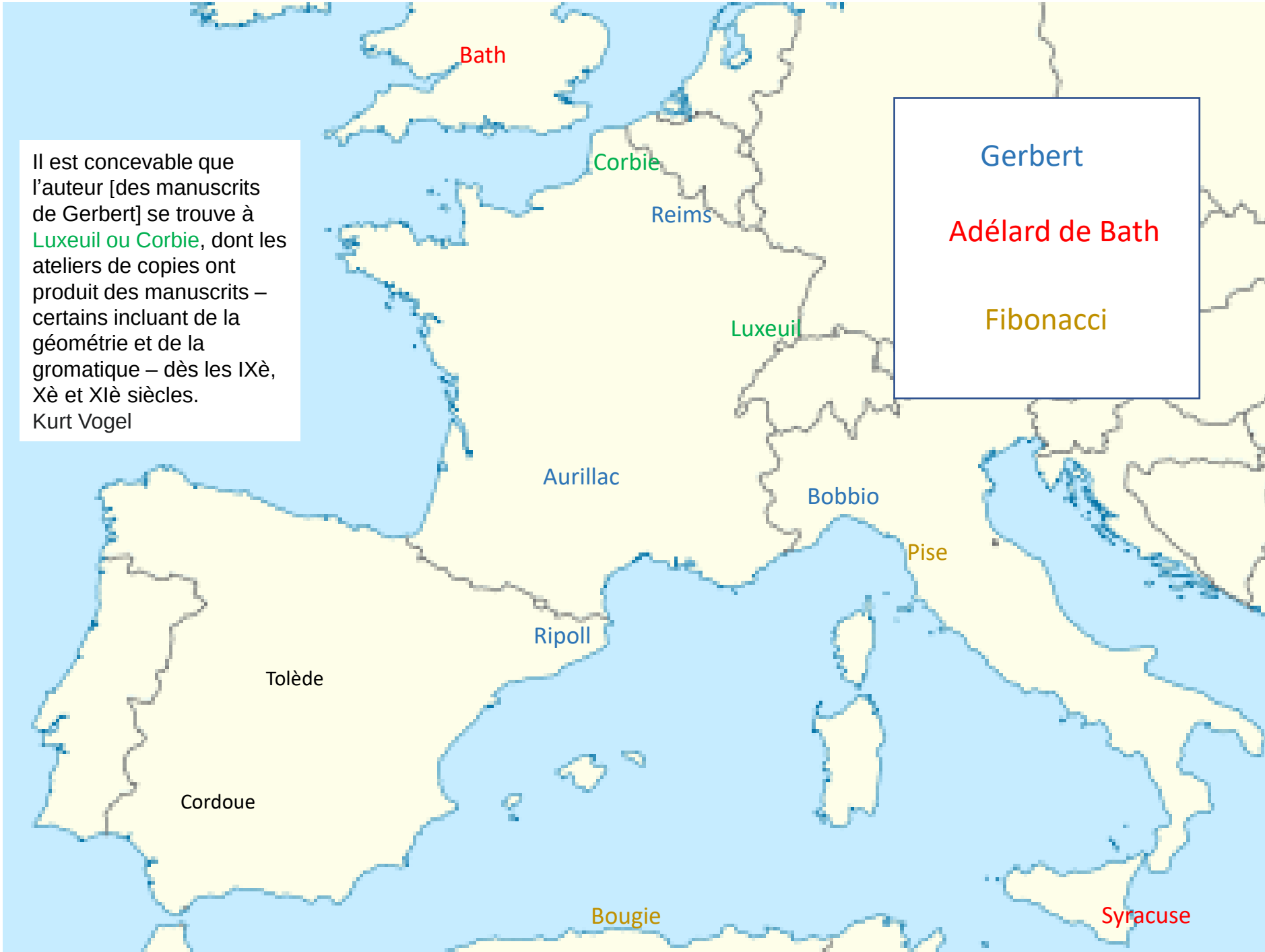
Jalons, chaîne

De la Chine à l'Europe …





As Sufi Al Biruni Brahmagupta Aryabatha Liu Hui



Il est concevable que l'auteur [des manuscrits de Gerbert] se trouve à Luxeuil ou Corbie, dont les ateliers de copies ont produit des manuscrits – certains incluant de la géométrie et de la gromatique – dès les IXè, Xè et XIè siècles.
Kurt Vogel

Remerciements

VOGEL Kurt

[1983] Ein Vermessungsproblem Reise von China nach Paris, *Historia Mathematica*, Volume 10, Issue 3, August 1983, p. 360-367

Traduction anglaise dans : DOLD-SIMPLONIUS Yvonne, …

[2002] *From China to Paris: 2000 Years Transmission of Mathematical Ideas*, Franz Steiner Verlag, 2002, p. 2-7

GUITART René

[2023] Géométrie pratique d'inaccessibles avec G. de Longchamps, dans *Géométries d'hier à demain, pratiques, méthodes, enseignement,* IREM&S de Poitiers, 23e colloque inter-IREM d'épistémologie et d'histoire des mathématiques, p. 165-184