MATHÉMATIQUES EXPÉRIMENTALES

IREM-Reims 3 Mai 17

Ahmed JEDDI

Université de Lorraine - Archives H. Poincaré

5 mai 2017

Table des matières

1. Introduction

2. Méthodologie de la recherche scientifique

3. Historique

4. Mathématiques expérimentales

5. Conclusion

1. Introduction

2. Méthodologie de la recherche scientifique

3. Historique
   - Abû'l-Wafa
   - Gauss

4. Mathématiques expérimentales
   - Arnold - Borwein
   - Borel - Bkouche

5. Conclusion

Motivation - Contexte

- Choix du sujet de la conférence
- Expérience personnelle de l'enseignement des mathématiques en France et au Maroc
- Questionnements sur la pratique
- Comment j'ai appris les mathématiques : mathématiques modernes (raisonnement abstrait) vs jeux et activités manuelles

What is experimental Mathematics ?

What is Experimental Mathematics?

> The computer has in turn changed the very nature of mathematical experience, suggesting for the first time that mathematics, like physics, may yet become an empirical discipline, a place where things are discovered because they are seen.
>
> David Berlinski, 1997 [35]

> If mathematics describes an objective world just like physics, there is no reason why inductive methods should not be applied in mathematics just the same as in physics.
>
> Kurt Gödel, 1951 [98]

Source principale

le livre
Jonathan Borwein, David Bailey
Mathematics by Experiment

Les références des citations ci-dessus :

David Berlinski. Ground Zero: A Review of The Pleasures of Counting, by T.W. Koerner. *The Sciences*, pages 37–41, Jul./Aug. 1997.

Kurt Gödel. *Some Basic Theorems on the Foundations*, volume 3. Oxford University Press, Oxford, 1986–2003.

1. Introduction

2. Méthodologie de la recherche scientifique

3. Historique
- Abû'l-Wafa
- Gauss

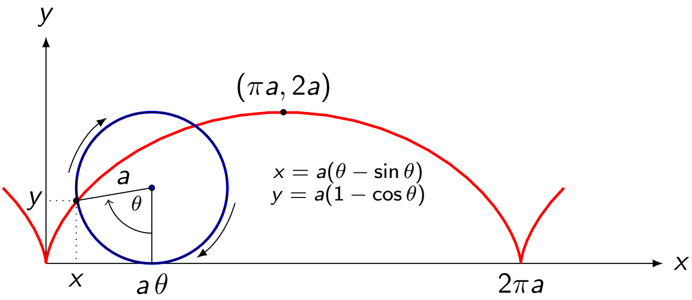
4. Mathématiques expérimentales
- Arnold - Borwein
- Borel - Bkouche

5. Conclusion

Méthodologie de la recherche scientifique

- Comment invente-t-on et/ou découvre-t-on en mathématiques ?
- Apprendre c'est chercher une réponse à une question donnée : Quelles sont les méthodes de la recherche en sciences en général ? En mathématiques en particulier ? Différence et analogie ?
- Abdul-Rahman BADAWI (1917-2002), Scientific Research Methodology, Cairo, 1963 (en arabe de 240 pages) :
  (a) méthode déductive (b) méthode expérimentale
  (c) méthode rétrospective.

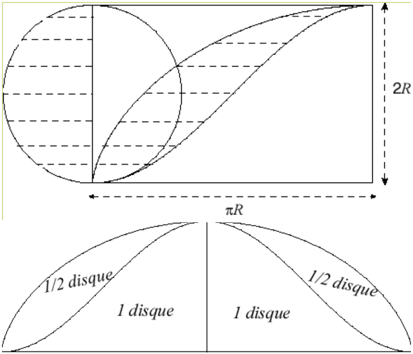
Cycloïde



(écriture moderne)

Galilée (1564-1642) : pesée (1599,
Roberval (1602-1675) : méthode des indivisibles

Roberval



Méthode des indivisibles

1. Introduction

2. Méthodologie de la recherche scientifique

3. Historique
- Abû'l-Wafa
- Gauss

4. Mathématiques expérimentales
- Arnold - Borwein
- Borel - Bkouche

5. Conclusion

Abû'l-Wafa (*théorie vs pratique*)

- Dans la tradition grecque, en particulier chez Platon, **la théorie** est la connaissance comtemplative, abstraite et désintéressée qui tire les conséquences à partir des principes par un raisonnement rigoureux. Au sens courant, une théorie est un ensemble de thèses, sur un sujet donné, organisées de façon plus ou moins systématique. Une théorie scientifique "est l'hypothèse vérifiée après qu'elle a été soumise au contrôle du raisonnement et de la critique expérimentale" (Claude Bernard).
- Chez les Grecs aussi, la **pratique** est ce qui concerne l'action (praxis) par opposition à la production (poesis) et à la théorie (theôria). Au sens ordinaire, la pratique est l'exercice d'une activité appliquée à la réalité. Au sens philosophique moderne, la pratique est tout ce qui concerne l'action concrète des hommes d'une part dans sa dimension technique et d'autre part dans sa dimension éthique.

Abû'l-Wafa (Trisection du carré)

La question de décomposition du carré en d'autres figures comme puzzle précède de celle que pose :

Abû'l-Wafa al- Buzjâani (939-998)

à savoir, décomposer un carré en un certain nombre de pièces formant trois carrés isométriques dont la somme des aires est égale à l'aire du carré de départ :

Trisection du carré.

Cette formulation (nombre de sous-carrés égal à trois) ne semble pas avoir été énoncée avant ce mathématicien (?), arabo-musulman, né en Iran, a vécu à Bagdad.

Mathematics and Arts Medieval Islamic World

Alpay Özdural, Mathematics and Arts : Connections between Theory and Practice in the Medieval Islamic World, Historia Mathematica 27 (2000), 171–201.
Les artisans utilisaient une trisection empirique.

Trisection de l'artisan

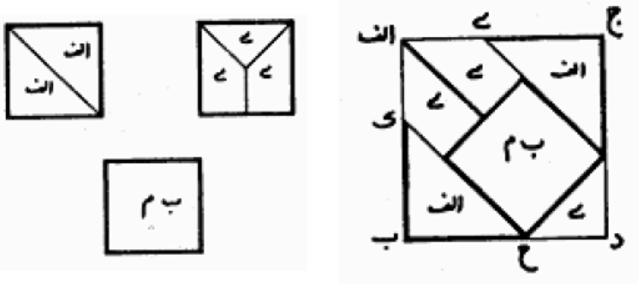
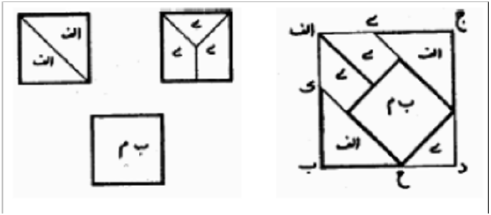


Fig. 1: Before Abū'l-Wafā''s solution (credit Reza Sarhangi)

géométriquement fausse

Par Pythagore

- Si la longueur du côté d'un petit carré vaut *un*.
- La diagonale d'un petit carré vaut *racine carrée de deux*.
- La longueur du côté du grand carré vaut *racine carrée de trois*.
- La diagonale d'un grand carré vaut *racine carrée de six*.



Ce qui donne : 1 + 1,414 ~ 2,414 au lieu de 1,732 x 1,414 ~ 2,449

solution géométrique de Abu'l-Wafa

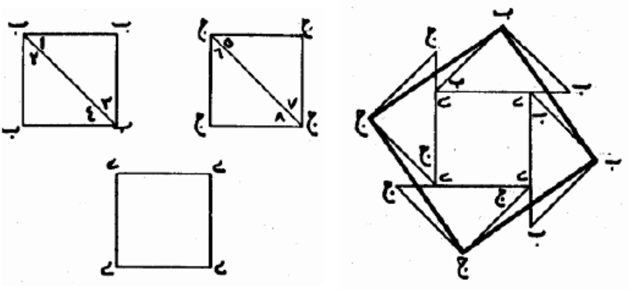


Fig. 2: Abū'l-Wafā' solution (credit Reza Sarhangi)

9 pièces

Livre des constructions géométriques nécessaires à l'artisan (en arabe)

"Abu'l-Wafa parle clairement de fréquents forums de discussion réunissant théoriciens et praticiens et laisse entendre l'existence d'un enseignement des règles de la géométrie développé au profit des métiers artisanaux. C'est lors de l'une de ses rencontres avec les professionnels de la céramique qui utilisent largement les figures géométriques, que l'auteur nous livre sa conception des rapports entre science et savoir artisanal : Quelques ingénieurs- géomètres et artisans, écrit-il, se sont trompés au sujet de la façon de construire ces carrés et de procéder à leur assemblage. Les premiers (les géomètres) ont commis des erreurs du fait de leur pratique limitée dans le domaine de l'architecture ; quant aux seconds, c'est à cause de l'ignorance de la science des démonstrations. "

traduction : Mohammed El-Faiz

"Il en est ainsi parce que les ingénieurs, manquant généralement d'expérience de terrain, peuvent difficilement faire des approximations et les démontrer par le recours à des schémas linéaires compréhensibles par l'artisan. Ce dernier a plutôt besoin d'un procédé qui simplifie sa tâche et le conforte dans ce qu'il peut sentir et observer empiriquement, sans s'encombrer de démonstrations schématisées par des lignes A l'opposé, l'ingénieur- géomètre, une fois que la preuve est établie en théorie (par *imagination*, bi al-takahhun), ne se préoccupe pas de savoir si son hypothèse peut être corroborée par le moyen de l'observation. Toutefois, nous ne doutons pas que les connaissances de l'artisan soient tributaires de l'œuvre de l'ingénieur-géomètre et de son effort de conception. En effet, ce qui intéresse le maître artisan et l'arpenteur, c'est le résultat obtenu et non pas le moyen permettant de l'établir correctement. D'où le risque d'erreur et de confusion. "

traduction : Mohammed El-Faiz

" Quant au géomètre, il peut démontrer ce qu'il veut lorsqu'il est lui-même le concepteur des modèles utilisés par l'ouvrier artisan et l'arpenteur. Mais il lui est difficile de passer de la théorie à la pratique lorsqu'il manque d'apprentissage et de connaissance des métiers concernés. "

Gauss (*induction vs déduction*)

Dans son livre cité plus haut, Borwein et Baily donne Gauss comme exemple de mathématicien expérimentateur :

> Carl Friedrich Gauss once confessed
>
> I have the result, but I do not yet know how to get it. [8, page 115]

En fait Gauss était très doué pour trouver des modèles pertinents pour des données numériques. Il avait juste 14 ou 15 ans quand il a conjecturé que $\pi(n)$, le nombre de nombres premiers inférieurs à n, est asymptotiquemt équivalent à $\frac{n}{\ln(n)}$. c'est le théorème des nombres premiers , prouvé plus tard par Hadamard et Vallée Poussin en 1896. Une légende raconte aussi qu'entre 7 et 10 ans, Karl Gauss aurait trouvé une façon de calculer la somme des nombres entiers de 1 à 100 très rapidement : $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Gauss : Moyenne arithmético-géométrique)

Une autre prouesse de l'expérience mentale en mathématiques de Gauss ...La moyenne arithmético-géométrique a été découverte indépendamment par les mathématiciens Adrien-Marie Legendre puis Carl Friedrich Gauss qui s'en servirent pour calculer de façon approchée la longueur de l'arc d'ellipse quelconque, qui s'exprime comme une intégrale elliptique, et même est à l'origine de l'intérêt pour ce domaine de l'analyse. En 1799, analysant les relations entre la moyenne arithmético-géométrique et des tables d'intégrales elliptiques de 1re espèce (proposées par James Stirling), Gauss, dans ses Cahiers mathématiques attira l'attention sur la relation (donnant la longueur d'arc d'une lemniscate de Bernoulli) :

$$\frac{\pi}{2M(1,\sqrt{2})} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^4}}.$$

Gauss : Moyenne arithmético-géométrique)

le nombre $M(1, \sqrt{2})$ est la limite commune ($\approx 1,198140234735592207\,4\ldots$) des suites adjacentes (a_n) et (b_n) (rapidement convergentes) de l'itération de la moyenne arithmético-géométrique :

$$a_0 = 1,\ b_0 = \sqrt{2},\ a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2},\ b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}.$$

Gauss : Moyenne arithmético-géométrique)

En se basant uniquement sur des observations numériques a conjecturé et a prouvé par la suite qu'effectivement l'égalité

$$\frac{1}{M(1,\sqrt{2})} = \frac{2}{\pi}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^4}}.$$

est valide. C'était un résultat remarquable, à propos duquel il a écrit dans son journal que ça ouvrira tout un nouveau champ d'analyse. Il avait raison, ça a orienté la vue 19-siècle sur les fonctions modulaires et elliptiques.

1. Introduction

2. Méthodologie de la recherche scientifique

3. Historique
- Abû'l-Wafa
- Gauss

4. Mathématiques expérimentales
- Arnold - Borwein
- Borel - Bkouche

5. Conclusion

Arnold

- Mathématiques expérimentales par V. ARNOLD
  IREM-Paris7 2005
- Texte en anglais, On teaching mathematics, Palais de Découverte, Paris 7 mars 1997
- Sur l'éducation des mathématiques, Gazette-78, octobre 1998

Dans sa conférence à l'IREM de Paris 7, 2005, I. V. Arnold donne comme exemple de la démarche expérimentale d'Euler (1777-1855) qui, par un procédé de comptage, puis un raisonnement de type probabiliste, trouve la "densité" des fractions irrésductibles parmi toutes les fractions.

Arnold

Cette valeur s'exprime à l'aide de la fonction ζ de Riemann (c'est Euler qui l'a introduite en fait ainsi que les séries de Fourier, nous précise Arnold) est égale à $\frac{1}{\zeta(2)}$, avec $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$, $\Re s > 1$, et dont il a calculé la valeur exacte $\frac{6}{\pi^2}$.

Cette recherche a permis aussi d'établir la formule, dite produit eulerien :

$$\zeta(s) = \prod_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}},$$

$\mathbb{P}$ étant l'ensemble des entiers naturels premiers, $\Re s > 1$.

Borwein

On trouvera sur ce site des ressources et documents sur les mathématiques expérimentales. ▸ Experimental Mathematics Web Site

To be precise, by experimental mathematics, we mean the methodology of doing mathematics that includes the use of computations for:

1. Gaining insight and intuition.
2. Discovering new patterns and relationships.
3. Using graphical displays to suggest underlying mathematical principles.
4. Testing and especially falsifying conjectures.
5. Exploring a possible result to see if it is worth formal proof.
6. Suggesting approaches for formal proof.
7. Replacing lengthy hand derivations with computer-based derivations.
8. Confirming analytically derived results.

Borel (*Laboratoires de mathématiques*)

Les exercices pratiques de mathématiques dans l'enseignement secondaire, conférence faite par Émile Borel le 3 Mars 1904 au musée pédagogique, SMF Gazette - 93 Juillet 2002, 18 pages

- Présentation
- Position et intérêt
- Dessin et construction géométrique
- Rôle des laboratoires mathématiques
- Conception des laboratoires mathématiques

Bkouche (*Laboratoires de mathématiques*)

Des laboratoires de mathématiques, Rudolf Bkouche, IREM de Lille, 32 pages

- Citation de Kant
- De l'expérience en mathématiques
- La place des laboratoires mathématiques dans l'enseignement

1. Introduction

2. Méthodologie de la recherche scientifique

3. Historique
- Abû'l-Wafa
- Gauss

4. Mathématiques expérimentales
- Arnold - Borwein
- Borel - Bkouche

5. Conclusion

Lombard

Les méthodes expérimentales en géométrie, Philippe Lombard, Irem de Lorraine, Repères num. 73-Oct 2008, 26 pages

- Expérimentation, démarche d'investigation, logiciels de géométrie dynamique
- Expérimenter pourquoi ?
- Figure (et fausse) et expérimentation
- Synthèse

Poincaré

L'avenir des Mathématiques, Henri Poincaré, Revue générale des sciences pures et appliquées, 1909, 18 pages

- Intuition et rigueur
- Pour finir :

IL EST FACILE DE VOIR

Une fois, ayant demandé à Laplace quelque explication sur sa mécanique céleste, je le vis passer près d'une heure à tâcher de ressaisir la chaîne des raisonnements qu'il avait supprimée en disant négligemment : *il est facile de voir que...*

BIOT.

Merci

- « Allez en avant, a dit d'Alembert, la foi vous viendra. » Le remarquable morceau qui suit est un commentaire de ce conseil parfois contesté.

- La vie n'est bonne qu'à étudier et à enseigner les mathématiques.

  POISSON.

MERCI POUR VOTRE ÉCOUTE !