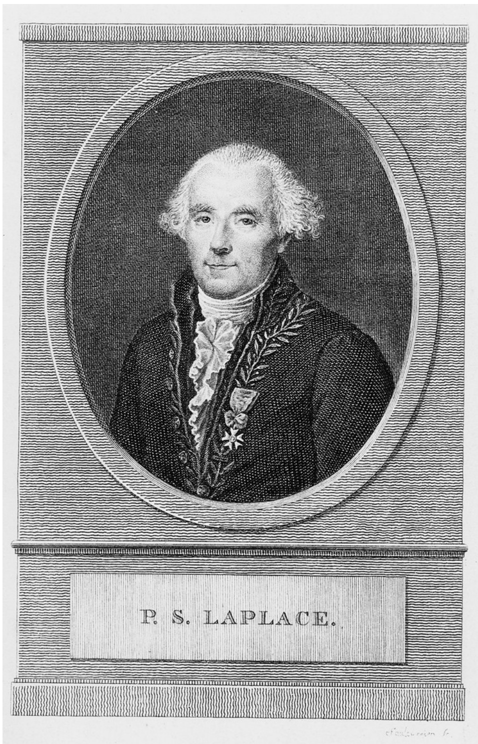
UN EXEMPLE DE PROBABILITÉ DES CAUSES CHEZ LAPLACE

Patrick Perrin
IREM de Reims

Pour Laplace le calcul des probabilités doit servir à faire progresser la connaissance des causes des phénomènes naturels. Dans ce but il a développé de nouvelles méthodes analytiques qui ont fait progresser significativement ce calcul. Un des exemples souvent cités par Laplace pour illustrer sa méthode de calcul des probabilités des causes est celui du sex-ratio. Nous présenterons ici de nombreux extraits consacrés à cette étude tirés de plusieurs de ses ouvrages (un mémoire de 1774, un autre de 1883, la dixième leçon à l'École Normale de l'an III et surtout la *Théorie analytique des probabilités*). Il nous a paru intéressant de proposer également quelques travaux antérieurs sur le sex-ratio ainsi qu'un exemple contemporain illustrant la méthode actuelle par test d'hypothèse. Le lecteur pourra ainsi remettre la démarche de Laplace dans une perspective historique.

PIERRE SIMON DE LAPLACE (1749 - 1827)

Fils de cultivateur, né à Beaumont-en-Auge un petit bourg normand, Pierre Simon de Laplace était destiné par son père à une carrière ecclésiastique. Entré à 16 ans à l'université de Caen, il découvre ses talents et son intérêt pour les mathématiques. A 20 ans il monte à Paris, se fait rapidement remarquer par d'Alembert qui lui trouve un poste de professeur de mathématiques à l'École Militaire. Quatre ans plus tard il est élu adjoint à l'Académie des Sciences après l'envoi de plusieurs communications. Ses premiers travaux concernent déjà le thème qui occupera toute sa carrière scientifique : développer des méthodes analytiques pour l'étude du mouvement des corps célestes et pour le calcul des probabilités. Au cours des années 1780, il présente plusieurs mémoires traitant des anomalies du mouvement des planètes et des satellites.



Source : gallica.bnf.fr / Observatoire de Paris

Pendant la Révolution il se tient à l'écart de la politique, attitude prudente si l'on pense au sort réservé à ses proches collègues académiciens Bailly, Bochart de Saron, Condorcet et Lavoisier [1]. Il met néanmoins ses connaissances scientifiques au service de la Révolution ;

1 Jean Sylvain Bailly, astronome et premier président de l'Assemblée Nationale est guillotiné à la fin de 1793. Le mathématicien Condorcet, ancien secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences, qui avait été élu député Girondin à la Convention est retrouvé mort dans sa cellule en mars 1794. Jean Baptiste Gaspard Bochart de Saron, ancien président de l'Académie des Sciences, qui avait été président du parlement de Paris est guillotiné en avril 1794. Antoine Laurent de Lavoisier, l'un des créateurs de la chimie moderne, est exécuté en mai 1794.

nommé en 1790 à la commission des poids et mesures, il travaille pour l'adoption du système métrique. Au début de l'année 1795 il donne des cours avec Lagrange et Monge à l'École Normale de l'an III qui vient d'être créée[2] . Il participe à la création du Bureau des longitudes (juin 1795) et de l'Institut national des sciences et des arts (octobre 1795) et retrouve ainsi une place importante dans le monde scientifique français. Cette position va encore se renforcer après le coup d'État du 18 brumaire an VIII. Avec Berthollet, Lacepède, Lagrange et Monge, il fait partie des scientifiques que le premier consul Bonaparte nomme au Sénat ; Laplace en occupera la fonction administrative de chancelier. Les mêmes savants sont faits comtes de l'Empire en avril 1808 par l'empereur Napoléon. Cette période est aussi la plus fructueuse pour sa production scientifique avec la publication de ses quatre œuvres majeures : l'*Exposition du système du monde* (1796) ouvrage de vulgarisation dans lequel se trouve son hypothèse célèbre sur l'origine du système solaire, le *Traité de mécanique céleste* (4 premiers volumes 1799-1805) somme monumentale qui regroupe tous les résultats de l'époque concernant l'astronomie physique, la *Théorie analytique des probabilités* (1ere éd. 1812) et l'ouvrage de vulgarisation qui lui est associé l'*Essai philosophique sur les probabilités* (1ere éd. 1814).

Après la défaite de Napoléon à Leipzig il s'éloigne définitivement de l'empereur, ce qui lui permet de conserver sa position sous la Restauration. Il reçoit même le titre de marquis en 1817. Pendant cette période est publié le cinquième volume du *Traité de mécanique céleste*. Signalons enfin qu'il a participé avec Berthollet à la création de la Société d'Arcueil qui soutenait les recherches des jeunes scientifiques. Il serait certes facile de voir dans la trajectoire publique de Laplace celle d'un opportuniste, mais lui-même nous donne dans un passage de l'*Essai philosophique sur les probabilités* une autre interprétation possible de ses revirements politiques : en héritier du siècle des lumières il souhaitait simplement que le gouvernement des peuples soit guidé par la raison et dénonçait l'expansionnisme militaire qui ne pouvait conduire qu'au désastre.

> Ainsi des chances favorables et nombreuses étant constamment attachées à l'observation des principes éternels de raison, de justice et d'humanité, qui fondent et maintiennent les sociétés, il y a grand avantage à se conformer à ces principes et de graves inconvénients à s'en écarter. Que l'on consulte les histoires et sa propre expérience, on y verra tous les faits venir à l'appui de ce résultat du calcul. Considérez les heureux effets des institutions fondées sur la raison et sur les droits naturels de l'homme chez les peuples qui ont su les établir et les conserver. Considérez encore les avantages que la bonne foi a procurés aux gouvernements qui en ont fait la base de leur conduite, et comme ils ont été dédommagés des sacrifices qu'une scrupuleuse exactitude à tenir ses engagements leur a coûtés. Quel immense crédit au dedans ! Quelle prépondérance au dehors ! Voyez, au contraire, dans quel abîme de malheurs les peuples ont été souvent précipités par l'ambition et par la perfidie de leurs chefs. Toutes les fois qu'une grande puissance, enivrée de l'amour des conquêtes, aspire à la domination universelle, le sentiment de l'indépendance produit entre les nations menacées une coalition dont elle devient presque toujours la victime. Pareillement, au milieu des causes variables, qui étendent ou qui resserrent les divers états, les limites naturelles, en agissant comme causes constantes, doivent

2 Elle devait former 1200 élèves instituteurs, mais fermera au bout de 4 mois.

> finir par prévaloir. Il importe donc à la stabilité, comme au bonheur des empires, de ne pas les étendre au-delà de ces limites dans lesquelles ils sont ramenés sans cesse par l'action de ces causes, [...][3]

On remarquera que dans son plaidoyer pour une gouvernance raisonnable des peuples Laplace n'hésite pas à appuyer son analyse politique sur une interprétation d'un résultat du calcul des probabilités : en vertu de la loi des grands nombres, « dans une série d'évènements indéfiniment prolongée, l'action des causes régulières et constantes doit l'emporter à la longue sur celle des causes irrégulières [4]». Pour Laplace le domaine d'application des probabilités est donc très vaste.

Laplace et le calcul des probabilités

Laplace est un déterministe convaincu : il conçoit le hasard comme un moyen de pallier notre ignorance. Cette conception philosophique est clairement exprimée dans les deux citations suivantes :

> Tous les événements, ceux mêmes qui, par leur petitesse, semblent ne pas tenir aux grandes lois de l'univers, en sont une suite aussi nécessaire que les révolutions du soleil. On les attribue au hasard, parce que l'on ignore les causes qui les produisent et les liens qui les unissent au système entier de la nature. [5]

> Nous devons donc envisager l'état présent de l'univers comme l'effet de son état antérieur, et comme la cause de celui qui va suivre. Une intelligence qui, pour un instant donné, connaîtrait toutes les forces dont la nature est animée, et la situation respective des êtres qui la composent, si d'ailleurs elle était assez vaste pour soumettre ces données à l'analyse, embrasserait dans la même formule les mouvements des plus grands corps de l'univers et ceux du plus léger atome : rien ne serait incertain pour elle, et l'avenir comme le passé serait présent à ses yeux.[6]

Si Laplace s'est autant intéressé au calcul des probabilités c'est parce qu'il y voyait un moyen de faire progresser la connaissance des causes des phénomènes naturels. A défaut de certitude on devait pouvoir déterminer la probabilité d'une cause possible. Mais pour y parvenir il était nécessaire d'apporter de considérables améliorations à un calcul qui était né pour l'étude des jeux de hasard. Dans la *Théorie analytique des probabilités*, qui regroupe tous ses travaux sur le sujet, Laplace refonde le calcul du hasard sur quelques principes simples et donne des outils analytiques puissants pour l'application aux statistiques. Cet ouvrage d'une lecture parfois difficile fera une forte impression sur les contemporains de Laplace ; il marque une étape importante dans l'histoire du calcul des probabilités.

Laplace fonde le calcul des probabilités sur dix principes concernant : le rapport du nombre de cas favorables sur le nombre de cas possibles, la propriété d'additivité, les probabilités composées, la probabilité des causes, l'espérance mathématique, l'espérance morale. Il développe les méthodes analytiques dans la résolution des problèmes, introduit les fonctions

3 P.S. Laplace, *Essai philosophique sur les probabilités*, 4e édition, 1819, ; *in* [7] vol.1 p. LIII-LIV .
4 Ibidem p. LIII.
5 P.S. Laplace, Dixième leçon à l'Ecole Normale de l'an III ; *in* [5] p.125.
6 P.S. Laplace, *Essai philosophique sur les probabilités*, 4e édition, 1819, ; *in* [7] vol.1 p. VI-VII.

génératrices, généralise le théorème limite de De Moivre. La découverte fondamentale de Laplace concerne la théorie des erreurs ; les mesures physiques et astronomiques sont soumises à toutes sortes d'erreurs inévitables, il est donc important de connaître comment les erreurs se comportent statistiquement, de quelle façon elles se distribuent. En déterminant à l'aide de la loi normale l'expression générale de « la probabilité que la somme des erreurs d'un grand nombre d'observations sera comprise dans des limites données [7]» Laplace nous donne le premier énoncé du théorème central limite.

Laplace a appliqué le calcul des probabilités aux domaines les plus divers : jeux, philosophie naturelle, sciences morales, probabilité des témoignages, choix et décisions des assemblées, probabilité des jugements de tribunaux, table de mortalité, durée moyenne de vie, bénéfices des établissements qui dépendent de la probabilité des événements.

La probabilité des causes

Le principe

Laplace commence à s'intéresser à la probabilité des causes dans son mémoire de 1774 : *sur la probabilité des causes par les événements*. Voici un extrait dans lequel il précise la classe de problèmes relevant de la probabilité des causes avant de donner le principe permettant de résoudre ceux-ci :

> L'incertitude des connaissances humaines porte sur les événements ou sur les causes des événements ; si l'on est assuré, par exemple, qu'une urne ne renferme que des billets blancs et noirs dans un rapport donné, et que l'on demande la probabilité qu'en prenant au hasard un de ces billets il sera blanc, l'événement alors est incertain, mais la cause dont dépend la probabilité de son existence, c'est-à-dire le rapport des billets blancs aux noirs est connue.
> Dans le problème suivant : *Une urne étant supposée renfermer un nombre donné de billets blancs et noirs dans un rapport inconnu, si l'on tire un billet et qu'il soit blanc, déterminer la probabilité que le rapport des billets blancs aux noirs est celui de p à q* ; l'événement est connu et la cause inconnue.
> On peut ramener à ces deux classes de problèmes tous ceux qui dépendent de la théorie des hasards ; nous ne discuterons ici que ceux de la seconde classe, et pour cela nous établirons le principe suivant :
> Principe. - *Si un événement peut être produit par un nombre n de causes différentes, les probabilités de l'existence de ces causes prises de l'événement sont entre elles comme les probabilités de l'événement prises de ces causes, et la probabilité de l'existence de chacune d'elles est égale à la probabilité de l'événement prise de cette cause, divisée par la somme de toutes des probabilités de l'événement prises de chacune de ces causes.*[8]

La première phrase du principe signifie qu'il y a proportionnalité entre les probabilités de l'existence des causes et les probabilités correspondantes de l'événement ; la seconde donne le résultat du partage proportionnel. Cet énoncé est repris dans la *Théorie analytique* en tant que troisième principe ; les termes employés se rapprochent davantage du vocabulaire actuel :

7 P.S. Laplace, *Théorie analytique des probabilités*, 3e édition, 1820 ; *in* [7] vol.2 Table des matières Chap. IV.
8 P.S. Laplace, *Mémoire sur la probabilité des causes par les événements,* 1774 ; [3] p.29.

> Si un événement observé peut résulter de n causes différentes, leurs probabilités sont respectivement, comme les probabilités de l'événement, tirées de leur existence ; et la probabilité de chacune d'elles est une fraction dont le numérateur est la probabilité de l'événement, dans l'hypothèse de l'existence de la cause, et dont le dénominateur est la somme des probabilités semblables, relatives à toutes les causes. [9]

La démonstration du principe

Dans la *Théorie analytique* Laplace donne une démonstration de la formule de la probabilité des causes reposant sur les premiers principes de la théorie. Nous avons gardé les notations de Laplace, cependant pour une meilleure compréhension nous indiquons entre accolades l'équivalent en termes actuels. Laplace explique que l'évènement observé résultant d'une des causes est un événement composé[10]. Sa probabilité E est égale au produit de la probabilité F de l'évènement observé par la probabilité P que, cet événement ayant lieu, la cause dont il s'agit existe.

Donc $P=\frac{E}{F}$. $\qquad \{E=p(Obs\cap Cau)\,;F=p(Obs);\,P=p(Cau/Obs)\}$

Mais la probabilité E de l'évènement composé est aussi le produit de la probabilité de la cause par la probabilité H que, cette cause ayant lieu, l'évènement arrivera. Pour poursuivre le calcul Laplace introduit une hypothèse supplémentaire : « Toutes les n causes étant *a priori* également possibles, la probabilité de chacune d'elles est $\frac{1}{n}$ »[11].

Donc $E=\frac{H}{n}$ $\qquad \{H = p(Obs/Cau)\}$

La probabilité F de l'évènement est la somme de toutes les probabilités E relatives à chaque cause, d'où $P=\frac{H}{S.H}$ $\qquad \{\ p(Cau/Obs)=\frac{p(Obs/Cau)}{\sum p(Obs/Cau)}\ \}$

Un exemple élémentaire

Pour illustrer son propos Laplace donne l'exemple suivant : supposons qu'une urne renferme 3 boules de couleur inconnue blanche ou noire. On ne peut faire *a priori* que quatre hypothèses suivant le nombre de boules blanches dans l'urne. On effectue m tirages avec remise d'une boule qui n'amène que des blanches (évènement observé), quelle est la probabilité de chacune des causes ? Voici la solution de Laplace :

> Si l'on considère ces hypothèses comme autant de causes de l'évènement observé ; les probabilités de l'évènement, relatives à ces causes, seront
>
> $1,\ \frac{2^m}{3^m}\ ,\ \frac{1}{3^m}\ ,0.$

9 P.S. Laplace, *Théorie analytique des probabilités*, 1ere édition, 1812 , Livre II Chapitre 1, p.182.
10 Un événement composé est l'intersection de plusieurs évènements.
11 Ibidem.

> Les probabilités respectives de ces hypothèses, tirées de l'évènement observé, seront donc, par le troisième principe,
>
> $$\frac{3^m}{3^m+2^m+1}\ ,\ \frac{2^m}{3^m+2^m+1}\ ,\ \frac{1}{3^m+2^m+1}\ , 0.$$ [12]

Dans cet exemple Laplace a supposé toutes les causes également possibles *a priori*.

La généralisation de la formule

Quelques années plus tard Laplace apporte un complément à son principe de probabilité des causes afin d'étendre sa formule au cas où les causes ne sont pas *a priori* également possibles. Voici ce complément tel qu'il figure dans la troisième édition de la *Théorie analytique* :

> Si cela n'est pas, en nommant *p* la probabilité *à priori* de la cause que nous venons de considérer, on aura $E = Hp$; et en suivant le raisonnement précédent, on trouvera
>
> $$P=\frac{Hp}{S\cdot Hp}\ ;$$ [13] $$\left\{\ p(Cau/Obs)=\frac{p(Obs/Cau).\,p(Cau)}{\sum p(Obs/Cau).\,p(Cau)}\ \right\}$$

Le lecteur aura reconnu le théorème dit de Bayes.[14]

L'étude du sex-ratio

Envisager l'étude du sex-ratio comme un problème de probabilité ne va pas de soi. Cela nécessite de considérer la détermination du sexe comme un phénomène aléatoire puis de trouver une modélisation pertinente. Pour se convaincre des difficultés posées il suffit de regarder les premiers textes consacrés à ce sujet. Par exemple les analyses de John Arbuthnot et de Nicolas Bernoulli sur la quasi-constance du sex-ratio sont riches d'enseignement.

L'analyse de John Arbuthnot

En 1710 le Docteur John Arbuthnot, membre du Collège des médecins et de la Royal Society, écrit un article dans les *Philosophical Transactions* intitulé *An Argument for Divine Providence , taken from the Constant Regularity observed in the Births of both Sexes* [15]. Son but est de démontrer par le moyen d'un calcul mathématique que les régularités qu'il a constatées sur le sex-ratio des enfants nés à Londres entre 1629 et 1710 [16] ne peuvent être expliquées que par la providence divine . L'article commence ainsi :

> Parmi les innombrables traces de la Divine Providence que l'on peut trouver dans les Œuvres de la Nature, il y a une très remarquable dans l'équilibre exact qui est

12 Ibidem, p.183.
13 P.S. Laplace, *Théorie analytique des probabilités*, 3e édition, 1820 ; *in* [7] Livre II, Chapitre 1, p.198-199.
14 Les travaux de Bayes furent publiés en Angleterre en 1763, mais les spécialistes pensent qu'ils n'étaient pas connus sur le continent lorsque Laplace rédigea son premier mémoire sur la probabilité des causes.
15 *Un argument en faveur de la Divine Providence, tiré de la régularité constante observée dans les naissances des deux sexes.*
16 Cf. catalogue en fin d'article.

maintenu entre le nombre d'hommes et de femmes ; car par ce moyen il est assuré que l'Espèce ne peut jamais faillir, ni périr, puisque chaque mâle doit avoir sa femelle, et d'un âge correspondant. Cette égalité des mâles et des femelles n'est pas l'effet du hasard mais celui de la Divine Providence, œuvrant pour la bonne Cause, ce que je démontre ainsi :[17] [Notre traduction]

Dans sa démonstration Arbuthnot imagine un dé à deux faces M et F et affirme que pour trouver les chances de tous les résultats qu'on peut obtenir en lançant un nombre quelconque n de ces dés, il suffit de prendre les coefficients des termes de $(M + F)^n$. Donc si un homme entreprend d'obtenir autant de M que de F avec un nombre pair de dés, il a tous les termes sauf celui du milieu contre lui. Par exemple avec 10 dés, son sort est de 252 sur 1024. (252 est le nombre de combinaisons de 5 éléments parmi 10 et $1024 = 2^{10}$). Et d'après Arbuthnot il est visible qu'avec un très grand nombre de dés, son sort deviendrait très petit.

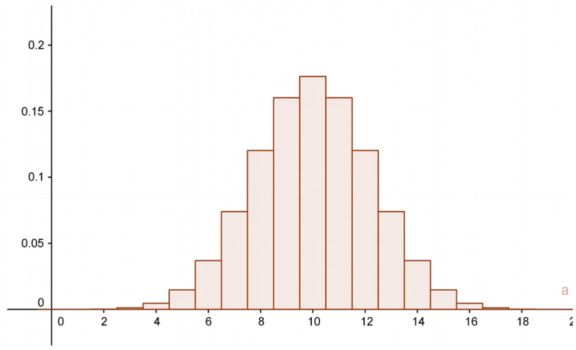
Conscient de la faiblesse de cet argument, Arbuthnot ajoute qu'il faut « avouer que cette égalité entre mâles et femelles n'est pas mathématique mais physique », ce qui modifie beaucoup le calcul précédent. En effet il faudrait considérer non seulement le terme du milieu mais aussi quelques uns des termes situés de part et d'autre de celui-ci. Puis il fait une observation plus intéressante sur le sex-ratio :

Et pour juger de la sagesse de la capacité d'invention de la Nature, nous devons observer que les accidents auxquels les mâles sont sujets (parce qu'ils doivent affronter le danger pour chercher leur nourriture) font un grand ravage parmi eux, et que cette perte excède de loin celle de l'autre sexe occasionnée par les maladies, comme l'expérience nous en convainc. Pour réparer cette perte, la Nature prévoyante, par la disposition de son sage Créateur, produit plus de mâles que de femelles ; et ceci dans une proportion presque constante. Ceci apparaît dans la table annexée [18], qui contient 82 années d'observation des naissances à Londres.[19] [Notre traduction]

Pour convaincre définitivement le lecteur, Arbuthnot propose alors un second calcul sous forme de problème. A parie contre B que chaque année il naîtra plus de garçons que de filles : trouvez le sort de A. Son raisonnement est le suivant. Le sort de A pour chaque année est inférieur ou égale à ½. (C'est la symétrie de la distribution binomiale de paramètre ½ illustrée par la figure 1 qui permet de l'affirmer). Par conséquent s'il entreprend de gagner pendant 82 années de suite son sort est inférieur ou égal à $\frac{1}{2^{82}}$ soit environ $\frac{1}{4{,}836.10^{24}}$

S'appuyant sur l'infini petitesse du sort de A, Arbuthnot conclut son raisonnement en ces termes : « De ceci il découle, que c'est l'Art et non la Chance qui gouverne ». En voulant à tout prix démontrer l'intervention de la Providence, Arbuthnot s'est-il rendu compte que l'hypothèse que son calcul permettait de rejeter n'est pas que le sexe à la naissance serait distribué au hasard, mais qu'il serait distribué au hasard avec équiprobabilité de la naissance d'un garçon ou d'une fille, ou bien a-t-il considéré que le hasard ne pouvait fournir qu'une distribution équiprobable ?

17 John Arbuthnot, *An Argument for Divine Providence ...* , *in* Philosophical Transactions 27, 1710.
18 Cette table est reproduite en fin d'article.
19 Ibidem.



Dessin 1: Loi binomiale de paramètres n = 20 p = 0,5

Contemporain d'Arbuthnot, Nicolas Bernoulli ne va pas manquer de critiquer la conclusion de celui-ci en proposant une analyse bien plus pertinente du catalogue des naissances à Londres.

L'analyse de Nicolas Bernoulli

Nicolas Bernoulli est le neveu de Jakob et Johann Bernoulli. A la suite de la parution en 1708 de l'*Essay d'analyse sur les jeux de hazard* [20] il eut une correspondance suivie sur des questions de probabilité avec Pierre Rémond de Montmort . C'est dans une de ses lettres datée du 23 Janvier 1713 que Nicolas Bernoulli expose sa démonstration concernant le problème de la quasi constance du sex-ratio. Le début de la lettre évoque une réponse probable à Arbuthnot :

> Je vous envoye le Catalogue des Enfans de chaque sexe nés à Londres depuis 1629 jusqu'à 1710, avec mes démonstrations de ce que je vous ai écrit touchant l'argument par lequel on veut prouver que c'est un miracle que les nombres des enfans de chaque sexe nés à Londres ne sont pas plus éloignés les uns des autres pendant 82 ans de suite, & que par le hazard il seroit impossible que pendant un si long-temps ils fussent toujours renfermés entre des limites aussi petites que celles qu'on a observées dans le Catalogue de 82 ans. Je prétens qu'il n'y a aucun sujet de s'étonner, & qu'il y a une grande probabilité pour que le nombre des mâles & des femelles tombent entre des limites encore plus petites que celles qu'on a observées.[21]

Pour sa démonstration Nicolas Bernoulli suppose que 14000 enfants[22] naissent chaque année à Londres ; autrement dit par une règle de trois la population des naissances annuelles est ramenée à 14000. Si le rapport des naissances garçons filles était de 18 à 17 [23], il devrait en

20 Cet ouvrage de Rémond de Montmort est la première étude systématique de la théorie des jeux de hasard. Un seul petit traité avait été publié auparavant sur le sujet : *De ratiociniis in ludo aleae* de Christian Huygens en 1657. L'ouvrage intéressa Nicolas Bernoulli et l'incita à publier en 1713 l'*Ars conjectandi* de son oncle Jakob mort en 1705. L'*Essay* est réédité en 1713 avec de nombreux compléments parmi lesquels la correspondance entre Rémond de Montmort et Nicolas Bernoulli.

21 Pierre Rémond de Montmort, *Essay d'analyse sur les jeux de hazard,* 2e édition, Paris, 1713, p.388.

22 Le choix de 14000 pour le nombre de naissances annuelles peut paraître *a priori* arbitraire, d'autant que la moyenne du nombre de naissances annuelles à Londres est égale à 11440. Mais 14000 présente l'avantage d'être multiple de 35 ce qui permet d'obtenir un nombre entier de naissances de garçons et de filles.

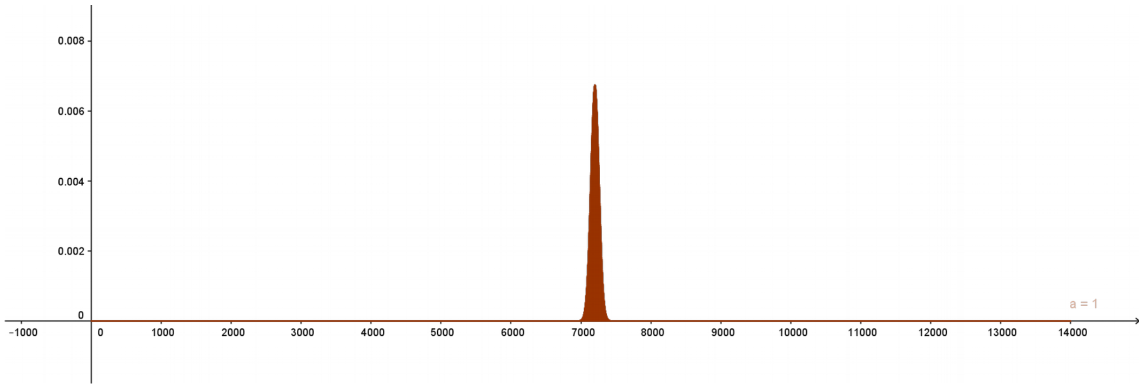
23 Nicolas Bernoulli indique que 18/17 « exprime le rapport entre la facilité de la naissance d'un garçon & celle de la naissance d'une fille », mais il ne donne pas la source de cette valeur. D'après la table des naissances à

naître chaque année respectivement 7200 et 6800. Il prend alors une limite de 163 correspondant à l'année 1703 où le nombre de filles a été le plus proche de celui des garçons[24]. Il peut alors préciser le problème de probabilité auquel il ramène l'étude de la variabilité annuelle du sex-ratio à Londres :

> Or je vous prouverai qu'il y a beaucoup à parier qu'entre 14000 enfans, le nombre des mâles ne sera ni plus grand ni plus petit que 7200 de 163 […]. Pour cette fin imaginons 14000 dés à 35 faces chacun dont 18 soient blanches & 17 noires.[25]

Nicolas Bernoulli se lance alors dans une tâche difficile pour l'époque puisqu'il s'agit d'évaluer la somme de tous les termes du binôme $(18 + 17)^{14000}$ depuis le 6638e jusqu'au 6964e. « Comme ces termes sont furieusement grands » dit-il, il lui faut procéder à plusieurs approximations avant d'aboutir après un long calcul à ce résultat :

> […] d'où je conclus que la probabilité qu'entre 14000 enfans le nombre des mâles ne sera ni plus grand que 7363, ni plus petit que 7037, sera à la probabilité que le nombre des mâles tombe hors de ces limites dans une raison plus grande au moins que 43,58 à 1.[26]



Dessin 2: Loi binomiale de paramètres n = 14000 et p = 18/35 ; P[7037 ≤ X ≤ 7363] ≈ 0,9943.

Le graphique de la figure 2 montre clairement que le rapport de ces deux probabilités doit être très grand. En fait le calcul sur tableur donne une valeur légèrement supérieure à 174 contre 1. Nicolas Bernoulli va ensuite appliquer son résultat à l'estimation de certains évènements pendant une période de 82 ans :

> Donc on peut déjà parier avec avantage qu'en 82 fois le nombre de mâles ne tombera pas trois fois hors de ces limites. Or en examinant le Catalogue des enfans nés pendant 82 ans à Londres, vous trouverés que le nombre des mâles a été onze fois plus grand que 7363 ; sçavoir en 1629, 39, 42, 46, 49, 51, 59, 60, 61, 69, 76 ; vous trouverés aussi aisément qu'on peut parier plus que 226 contre 1 que le nombre des

Londres il y a eu en 82 ans 484382 naissances de garçons et 453741 naissances de filles, ce qui donne un sex-ratio plus proche de 16/15 que de 18/17.

24 Si l'on ramène à 14000 le nombre des naissances en 1703, on obtient 6963 filles (6800 + 163) et 7037 garçons (7200 – 163).

25 Pierre Rémond de Montmort, *Essay d'analyse sur les jeux de hazard,* 2e édition, Paris, 1713, p.388-389.

26 Ibidem, p.392-393.

mâles ne tombera pas en 82 ans onze fois hors de ces limites.[27]

Le calcul de Nicolas Bernoulli correspond vraisemblablement à celui-ci. En termes actuels on peut considérer que le nombre de fois que le nombre des garçons est tombé hors de l'intervalle [7037 ; 7363] est donné par une variable aléatoire X suivant une loi binomiale de paramètres p = 1/44 et n = 82. De fait on a d'une part P[X < 2] ≅ 0,441 et P[X < 3] ≅ 0,713 d'où l'avantage à parier sur l'évènement [X < 3] et d'autre part P(X < 11] ≅ 0,999997 qui est largement inférieur à 1/227 [28] . Après avoir fait remarquer que s'il avait pris une limite plus grande que 163, il aurait trouvé une probabilité beaucoup plus grande que 43 à 1, Nicolas Bernoulli termine sa lettre en faisant le lien entre son calcul et un résultat célèbre de son oncle Jakob.

> Donc il n' y a point de sujet de s'étonner que les nombres des enfans de chaque sexe ne se sont pas plus éloignés les uns des autres, ce que j'ai voulu démontrer. Je me souviens que feu mon oncle a démontré une semblable chose dans son traité *De Arte conjectandi*, qui s'imprime à présent à Bâle, sçavoir, que si l'on veut découvrir par les expériences souvent réitérées le nombre des cas par lesquels un certain évènement peut arriver ou non, on peut augmenter les observations en telle maniere qu'enfin la probabilité que nous ayons découvert le vrai rapport qu'il y a entre les nombres des cas, soit plus grande qu'une probabilité donnée.[29]

Le lecteur aura reconnu l'allusion au théorème d'or de Jakob Bernoulli, la première pierre de l'édifice théorique permettant l'application du calcul des probabilités aux statistiques[30]. Ce travail de Nicolas Bernoulli n'est pas exempt de critique si on veut le lire avec un regard du 21e siècle ; on peut discuter du choix de certaines données numériques : un sex-ratio de 18 garçons pour 17 filles, 163 comme amplitude de l'intervalle de fluctuation ; on peut également s'étonner de l'interprétation qui est faite de l'observation de 11 années hors cet intervalle. Tout ceci ne remet pas en cause l'intérêt principal de la démarche mise en œuvre par Nicolas Bernoulli. Celui-ci vient tout simplement d'expliquer la stabilisation du sex-ratio comme un effet de la loi des grands nombres. Fait remarquable, Laplace, dans la *Théorie analytique des probabilités,* juste après avoir démontré le théorème limite de De Moivre, prendra comme premier exemple d'application le problème posé par Nicolas Bernoulli avec les mêmes données numériques : sex-ratio de 18 garçons pour 17 filles, 14000 naissances, probabilité que le nombre de garçons soit compris dans l'intervalle [7037 ; 7363].

27 Ibidem, p.393.

28 Notons toutefois que ce raisonnement repose implicitement sur l'hypothèse que les relevés annuels des naissances correspondent à des échantillons aléatoires d'une population de nouveaux-nés comportant une proportion de garçons égale à 18/35. Dans ce modèle l'évènement observé est très improbable puisque P[X ≥ 11] ≅ 0,000003. En examinant la table des naissances d'un peu plus près on peut constater que le sex-ratio calculé sur les 41 dernières années est proche de 18/17 alors que sur les 41 premières années il est proche de 14/13, cette différence pourrait expliquer pourquoi le sex-ratio annuel est 10 fois en dehors de l'intervalle [7037 ; 7363] pendant les 41 premières années et seulement une fois pendant les 41 dernières.

29 Ibidem.

30 Voici un énoncé moderne de ce théorème : Une épreuve de Bernoulli est répétée de façon indéfinie dans les mêmes conditions initiales, les épreuves successives conduisant à des résultats deux à deux indépendants ; si p désigne la probabilité d'obtenir un succès et la variable aléatoire F_n représente la fréquence des succès obtenus au cours des n premières épreuves, alors : $\forall \varepsilon>0,\ P[|F_n-p|<\varepsilon] \to 1 \ quand \ n \to \infty$. Ce théorème est un cas particulier de la loi faible des grands nombres.

LA DÉMARCHE DE LAPLACE POUR ÉTUDIER LES QUESTIONS RELATIVES AU SEX-RATIO

Avant de rentrer dans les détails de la méthode de calcul, écoutons Laplace présenter les principes de sa démarche lors de sa dixième leçon à l'École Normale de l'an III et apprécions la clarté de son discours lorsqu'il s'agit d'expliquer à un large public les résultats de ses dernières recherches :

> Ce que nous venons de dire s'applique aux naissances, que l'on peut comparer aux boules extraites d'une urne qui en renferme une infinité de blanches et de noires. Les naissances sont un objet important de l'histoire naturelle de l'homme et l'observation offre à cet égard des variétés remarquables dépendantes de la différence des sexes et des climats ; mais elles sont si petites qu'elles ne peuvent devenir sensibles qu'au moyen d'un grand nombre de naissances observées. Les événements d'un même genre ont des causes uniformes et constantes dont l'action peut être modifiée par mille circonstances variables qui produisent les irrégularités que nous attribuons au hasard. Ces irrégularités, en se compensant les unes par les autres, disparaissent dans une très longue suite d'observations qui ne laissent ainsi apercevoir que le résultat des causes constantes. Moins les effets de ces causes sont sensibles, plus il faut d'observations pour les reconnaître, et l'un des problèmes les plus intéressants de l'analyse des hasards est de déterminer jusqu'à quel point le nombre des observations doit s'élever pour acquérir une grande probabilité de l'existence des causes qu'elles paraissent indiquer, et pour les distinguer de ces variétés que le hasard seul amène dans la succession des événements également possibles. La méthode dont j'ai parlé ci-dessus, et dont l'objet est d'exprimer par des séries convergentes les fonctions de très grands nombres, fournit une solution générale de ce problème.[31]

En comparant l'étude du sex-ratio avec un tirage dans une urne contenant une infinité de boules noires et blanches, Laplace signifie que dans chaque population localisée géographiquement il existe un sex-ratio inconnu (Laplace parle dans ce cas de la possibilité d'une naissance masculine) et que les observations des naissances dans cette population fussent-elles exhaustives pendant une longue période de temps ne donneront qu'une estimation de cette valeur inconnue. D'une certaine manière Laplace traite le sex-ratio comme la mesure d'une grandeur physique dont les observations donneraient des valeurs approchées.

La méthode calculatoire et ses exemples d'application au sex-ratio sont décrits dans le mémoire *sur les approximations des formules qui sont fonctions de très grands nombres* de 1783 . Laplace les reprend quasi à l'identique dans le chapitre 6 du livre II de la *Théorie analytique* dont nous avons tiré les extraits qui suivent. La nature du problème nécessite d'utiliser une extension de la formule de probabilité des causes dans le cas où cette probabilité peut prendre toutes les valeurs de l'intervalle [0 ; 1]. Laplace l'expose dans le cas général au paragraphe 26 sous la forme suivante. Le paramètre x désigne la vraie possibilité de l'évènement étudié (par exemple la possibilité d'une naissance d'un garçon dans la population) ; Laplace suppose qu'en le considérant *a priori* x peut prendre toutes les valeurs de [0 ; 1] de manière équiprobable ; y désigne la fonction de x qui donne la probabilité conditionnelle du résultat observé conditionné par la valeur de x ; alors la probabilité *a*

31 P.S. Laplace, Dixième leçon à l'Ecole Normale de l'an III ; *in* [5] p.135.

posteriori (tenant compte de l'évènement observé) que la valeur de x appartienne à un intervalle [θ ; θ'] est égale, en vertu du 3e principe, au rapport de ces deux intégrales :

$$\int_{\theta}^{\theta'} y dx \div \int_{0}^{1} y dx$$

La loi *a posteriori* du paramètre x est donc fournie par la formule de Bayes. Le choix d'une loi uniforme *a priori* pour x est justifié par Laplace en indiquant que l'on peut toujours s'y ramener. En effet, explique-t-il, « quand les valeurs de x, considérées indépendamment du résultat observé, ne sont pas également possibles [32]», il suffit de remplacer y par yz dans la formule de probabilités des causes, z étant la fonction de x qui donne la densité *a priori*. Notons que cette probabilité relative au paramètre x n'est pas de même nature que celle définie par Laplace dans son premier principe (rapport du nombre des cas favorables à celui de tous les cas possibles). Ce problème sera soulevé par Cournot au milieu du 19e siècle et induira une remise en cause de la méthode de Bayes - Laplace[33].

En ce qui concerne les données numériques Laplace utilise des observations statistiques donnant le nombre de naissances masculines et féminines à Londres, Paris et dans le royaume de Naples pendant différentes périodes. Nous les avons résumé dans un tableau :

	Naissances garçons	Naissances filles	Sex-ratio	Période d'observation
Paris	393386	377555	25/24	1745-1784
Londres	737629	698958	19/18	1664-1758
Royaume de Naples	782352	746821	22/21	1774-1782

Prenant l'exemple des naissances à Paris il va expliquer comment à partir de ces observations on peut calculer la probabilité que le sex-ratio inconnu soit compris entre deux valeurs données. Il va d'abord calculer la probabilité de l'évènement observé (naissances de p garçons et q filles) sous l'hypothèse que le sex-ratio est égal à x, avant d'utiliser la formule donnée au paragraphe 26.

> Nommons p le nombre des naissances masculines observées à Paris, q celui des naissances féminines, et x la possibilité d'une naissance masculine, c'est-à-dire la probabilité qu'un enfant qui doit naître sera un garçon ; $1-x$ sera la possibilité d'une naissance féminine, et l'on aura la probabilité que sur $p + q$ naissances, p seront masculines et q seront féminines, égale à :
>
> $$\frac{1.2.3\ldots(p+q)}{1.2.3\ldots p.1.2.3\ldots q} x^p (1-x)^q$$
>
> en faisant donc
>
> $$y = x^p (1-x)^q \quad ,$$
>
> la probabilité que la valeur de x est comprise dans des limites données sera, par le n°26, égale à $\dfrac{\int y dx}{\int y dx}$,

32 P.S. Laplace, *Théorie analytique des probabilités*, 3e édition, 1820 ; *in* [7] Livre II, Chapitre 6, p.400.
33 cf. biblio [11]

l'intégrale du dénominateur étant prise depuis x = 0 jusqu'à x = 1 et celle du numérateur étant prise dans les limites données.[34]

Selon la terminologie actuelle $ydx \div \int_0^1 ydx$ est une densité de probabilité à support [0 ; 1]. Pour $y=x^p(1-x)^q$ c'est celle d'une loi bêta. L'intégrale du dénominateur se calcule simplement lorsque *p* et *q* sont entiers[35] et vaut dans ce cas :

$$\int_0^1 x^p(1-x)^q dx = \frac{p!\,q!}{(p+q+1)!}$$

Les questions relatives au sex-ratio proposées par Pierre Simon Laplace

La méthode d'approximation des intégrales

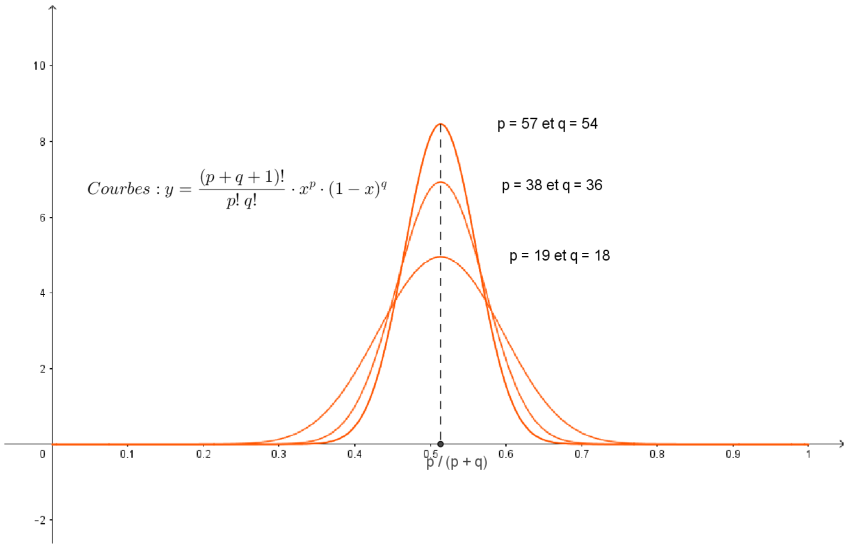
Les applications numériques de la formule de probabilité des causes vont nécessiter l'utilisation de méthodes de calcul approché pour évaluer l'intégrale $\int_\theta^{\theta'} x^p(1-x)^q dx$. Laplace les a présentées pour la première fois dans son *mémoire sur les approximations des formules qui sont fonctions de très grands nombres* de 1783. Elles concernent des fonctions algébriques « qui renferment des facteurs élevés à de grandes puissances » selon les termes de Laplace et elles dépendent de l'intervalle d'intégration comme il l'explique lui-même dans l'introduction de son mémoire :

> Dans l'article I de ce mémoire, je donne la solution du premier problème, qui, par lui-même, est très utile dans cette branche de l'Analyse des hasards, où l'on se propose de remonter des événements observés à leurs causes et de reconnaître, par ces événements, la probabilité des événements futurs […]. Cette solution me conduit à différentes séries qui se servent de supplément les unes aux autres, les premières devant être employées pour les points de l'intégrale éloignés du maximum de la fonction différentielle, et les secondes devant servir pour les points voisins de ce maximum : ces dernières suites renferment des quantités transcendantes qui, le plus souvent, se réduisent à celle-ci
>
> $$\int dt\, \mathrm{e}^{-t^2}$$
>
> *e* étant le nombre dont le logarithme hyperbolique est l'unité ; [36]

Nous allons présenter brièvement cette méthode dans le cas de la fonction de densité de la loi bêta (cf. figure 3). Cette fonction admet un maximum unique au point d'abscisse $a = p / (p + q)$. L'allure de ces courbes suggère que ce sont les valeurs situées au voisinage de *a* qui fournissent les contributions les plus importantes au calcul de l'intégrale et ce d'autant plus que les nombres *p* et *q* sont grands.

---

34 P.S. Laplace, *Théorie analytique des probabilités*, 3[e] édition, 1820 ; *in* [7] Livre II, Chapitre 6, p.415-416.
35 cf. annexe 2 en fin d'article.
36 P.S. Laplace, *Mémoire sur les approximations de formules qui sont fonctions de très grands nombres,* Mémoires de l'Académie royale des Sciences de Paris, année 1782



Dessin 3 : Fonction de densité de loi bêta

La méthode de Laplace consiste à effectuer un changement de variable défini de manière implicite par une relation qui indique la forme sous laquelle on souhaite transformer la fonction $y(x)$ à intégrer. Lorsque l'intervalle d'intégration est $[0 ; \theta]$ avec $\theta < a$ et θ "éloigné" de a [37], Laplace pose $y(x) = y(\theta) \cdot \mathrm{e}^{-t}$, lorsque l'intervalle d'intégration contient a ou des valeurs "voisines" de a, Laplace pose $y(x) = y(a) \cdot \mathrm{e}^{-t^2}$. La difficulté réside dans le calcul de dx/dt que Laplace exprime par un développement de Taylor au voisinage de $t = 0$. Pour obtenir l'approximation numérique de l'intégrale Laplace ne considère que les premiers termes de ce développement en série.

Les deux premiers exemples numériques vont permettre d'illustrer ces méthodes de calcul approché. La première application consiste à évaluer la probabilité qu'à Paris la possibilité des filles surpasse celle des garçons. Pour le calcul approché de $\int_0^{0,5} x^p (1-x)^q dx$ il faut employer la forme $y(x) = y\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \mathrm{e}^{-t}$ car dixit Laplace « vu la grandeur des nombres p et q, l'excès de $p/(p+q)$ est trop considérable » pour employer l'autre formule. Le calcul donne [38]

$$\int_0^{0,5} x^p (1-x)^q dx \approx \frac{1}{2^{p+q+1} \cdot (p-q)} \cdot \left[1 - \frac{p+q}{(p-q)^2}\right]$$

D'où l'on déduit pour la valeur numérique de la probabilité cherchée environ 4.10^{-32}, ce qui permet à Laplace d'affirmer que la probabilité qu'à Paris la possibilité des naissances de garçons surpasse celle des filles est égale « au moins, à celle des faits historiques les plus avérés ».

Pour la seconde application Laplace choisit d'illustrer l'importance de la taille de la

37 Il est clair que les expressions « éloigné de a » et « voisin de a » utilisées par Laplace dans la citation précédente et que nous reprenons ici n'ont pas de signification mathématique précise. Dans l'annexe 2 en fin d'article le lecteur trouvera une tentative d'explicitation partielle de ces conditions.

38 Une présentation succincte du calcul est proposée dans l'annexe 2.

population observée dans la recherche de la probabilité des causes. Dans certaines petites villes on a pu observer un nombre de naissances de filles supérieur à celui des garçons pour un total de naissances peu important. Faut il pour autant remettre en cause la loi générale observée dans les grandes villes d'Europe ? Laplace prend pour exemple la ville de Vitteaux, dans laquelle, sur une période de cinq années, il est né 203 garçons et 212 filles et se propose de calculer la probabilité qu'à Vitteaux les facilités des naissances de garçons surpassent celles des filles. Laplace utilise dans ce cas la forme $y(x)=y(a)\cdot e^{-t^2}$ et obtient [39]:

$$\frac{(p+q+1)!}{p!q!}\cdot\int_{0,5}^{1} x^p(1-x)^q\,dx \approx \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\theta}^{\infty} e^{-t^2}dt \quad \text{avec} \quad \theta=\sqrt{\ln\left(\frac{2^{(p+q)}.p^p.q^q}{(p+q)^{(p+q)}}\right)}$$

Ce qui donne pour la probabilité cherchée une valeur d'environ 0,33, soit une probabilité de 0,67 pour la supériorité de la facilité des naissances des filles. Pour Laplace cette probabilité est beaucoup trop faible pour dire qu'à Vitteaux la loi générale n'est pas vérifiée.

La question du sex-ratio à Paris

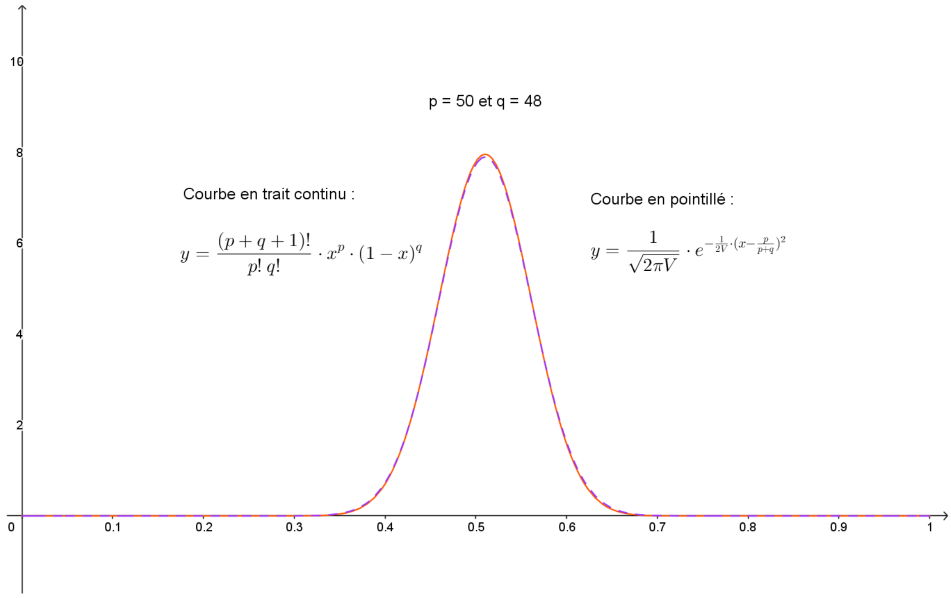
Nous allons nous attarder davantage sur le troisième exemple donné par Laplace dans le paragraphe 29 (Livre II, chap.6) dans lequel il est question de comparer le sex ratio dans les deux villes de Londres et Paris à partir des observations données dans le tableau ci-dessus [40].

> On a vu qu'à Londres, le rapport observé des naissances des garçons à celles des filles, est égal à 19/18, tandis qu'à Paris, celui des baptêmes des garçons à ceux des filles, n'est que 25/24. Cela semble indiquer une cause constante de cette différence. Déterminons la probabilité de cette cause.
> Soient p et q les nombres des baptêmes des garçons et des filles, faits à Paris dans l'intervalle du commencement de 1745 à la fin de 1784 ; en désignant par x, la possibilité du baptême d'un garçon, et faisant, comme dans le numéro précédent,
> $$y = x^p.(1-x)^q,$$
> la valeur de x la plus probable, sera celle qui rend y un maximum ; elle est donc $\frac{p}{p+q}$; en supposant ensuite
> $$x=\frac{p}{p+q}+\theta \quad ;$$
> la probabilité de la valeur de θ sera, par le n°26, égale à
> $$\frac{d\theta}{\sqrt{\pi}}\cdot\sqrt{\frac{(p+q)^3}{2pq}}\cdot e^{-\frac{(p+q)^3}{2pq}.\theta^2}.$$ [41]

L'utilisation de la méthode de Laplace donne ici une approximation par une loi normale puisque l'on reconnaît dans la « probabilité de la valeur de θ » la fonction de densité d'une loi normale d'espérance nulle et de variance $V=\frac{pq}{(p+q)^3}$. On peut constater sur la figure 4, qui

39 cf. annexe 2.
40 On veut établir une comparaison à partir de données observées sur des périodes différentes ce qui suppose une constance du sex ratio dans le temps.
41 P.S. Laplace, *Théorie analytique des probabilités*, 3e édition, 1820 ; *in* [7] Livre II, Chapitre 6, p.420.

propose une comparaison des fonctions de densité de la loi bêta et de la loi normale proposée par Laplace, que les différences entre les deux sont déjà peu sensibles pour les valeurs p = 50 et q = 48.



Dessin 4: Comparaison loi bêta loi normale

Laplace utilise ensuite le produit de deux densités pour calculer la probabilité cherchée :

> En désignant par p', q' et θ', ce que deviennent p, q et θ pour Londres, on aura
> $$\frac{d\theta'}{\sqrt{\pi}} \cdot \sqrt{\frac{(p'+q')^3}{2p'q'}} \cdot e^{-\frac{(p'+q')^3}{2p'q'}.\theta'^2}$$
> pour la probabilité de θ' ; le produit
> $$\frac{d\theta.d\theta'}{\pi} \cdot \sqrt{\frac{(p+q)^3.(p'+q')^3}{4pq.p'q'}} \cdot e^{-\frac{(p+q)^3}{2pq}.\theta^2-\frac{(p'+q')^3}{2p'q'}.\theta'^2}$$
> de ces deux probabilités sera donc la probabilité de l'existence simultanée de θ et θ'.[42]

Il s'agit donc de calculer une intégrale double, remarquons qu' il y a une hypothèse d'indépendance implicite concernant θ et θ′. Laplace pose ensuite le changement de variable $t = x' - x$ et indique que la fonction différentielle précédente devient

$$\frac{d\theta.dt}{\pi} \cdot \sqrt{\frac{1}{4VV'}}.\mathrm{e}^{\frac{-1}{2V}.\theta^2-\frac{1}{2V'}.(\theta+t-h)^2}$$

$$\text{où} \quad h=\frac{p'q-pq'}{(p+q)(p'+q')}=\frac{p'}{p'+q'}-\frac{p}{p+q} \quad \text{et} \quad V'=\frac{p'q'}{(p'+q')^3}$$

Il ajoute qu' « en l'intégrant pour toutes les valeurs possibles de θ, et ensuite pour toutes les valeurs positives de *t* ; on aura la probabilité que la possibilité des baptêmes des garçons est

42 Ibidem, p.420-421.

plus grande à Londres qu'à Paris [43]».

Après moult calculs, Laplace arrive au résultat suivant : la probabilité qu'à Londres la possibilité des baptêmes est plus grande qu'à Paris est donnée par $\int \frac{kdt}{\sqrt{\pi}}.\mathrm{e}^{-k^2(t-h)^2}$ intégrale prise depuis $t = 0$ jusqu'à l'infini avec $\frac{1}{2k^2}=V+V'$ où l'on reconnaît la densité d'une loi normale d'espérance h et de variance $1/2k^2$. Il ajoute que si l'on fait $k.(t - h) = t'$, cette intégrale devient $\int \frac{dt'}{\sqrt{\pi}}.\mathrm{e}^{-(t')^2}$ l'intégrale étant prise depuis $t' = -kh$ jusqu'à $t' = \infty$. Ce dernier changement de variable de Laplace consiste à centrer et réduire une loi normale. Celle qui lui sert de référence pour les calculs numériques a pour espérance 0 et écart type $1/\sqrt{2}$.

Calcul numérique de l'intégrale

Comme dans l'intégrale précédente kh est très grand, Laplace utilise pour le calcul numérique un développement asymptotique. Il pose $i^2=\frac{1}{2k^2h^2}$ et indique que l'intégrale précédente a pour expression

$$1-\frac{i\,\mathrm{e}^{\frac{-1}{2i^2}}}{\sqrt{2\pi}}.\cfrac{1}{1+\cfrac{i^2}{1+\cfrac{2i^2}{1+\cfrac{3i^2}{1+\cfrac{4i^2}{1+etc}}}}}$$

En remplaçant par les données numériques la formule devient $1-\frac{1}{328269}$.

Comme Laplace a trouvé une probabilité très proche de 1 que $x' > x$, il en conclut que le sex ratio à Londres est certainement plus grand qu'à Paris et que cette différence doit être due à l'existence d'une cause. Il peut alors conclure en ces termes :

> Il y a donc 328268 à parier contre un, qu'à Londres, la possibilité des baptêmes des garçons est plus grande qu'à Paris. Cette probabilité approche tellement de la certitude, qu'il y a lieu de rechercher la cause de cette supériorité.
> Parmi les causes qui peuvent la produire, il m'a paru que les baptêmes des enfants trouvés, qui font partie de la liste annuelle des baptêmes à Paris, devaient avoir une influence sensible sur le rapport des baptêmes des garçons à ceux des filles ; et qu'ils devaient diminuer ce rapport, si, comme il est naturel de le croire, les parens des campagnes environnantes, trouvant de l'avantage à retenir près d'eux les enfans mâles, en avaient envoyé à l'hospice des Enfans trouvés de Paris, dans un rapport moindre que celui des naissances des deux sexes. C'est ce que le relevé des registres de cet hospice m'a fait voir avec une très grande probabilité. Depuis le commencement de 1745 jusqu'à la fin de 1809, on y a baptisé 163499 garçons et

43 Ibidem, p.421.

159405 filles, nombre dont le rapport est 39/38, et diffère trop du rapport 25/24 des baptêmes des garçons et des filles à Paris, pour être attribué au simple hasard.[44]

LE TRAITEMENT DE LA MÊME QUESTION DANS L'*ESSAI PHILOSOPHIQUE SUR LES PROBABILITÉS* (1814)

Laplace va reprendre la question du sex-ratio à Paris dans son *essai philosophique sur les probabilités*, avec quelques modifications qui rendent son argumentation plus convaincante. Lorsqu'il rédige l'*Essai* Laplace dispose d'autres données statistiques, à savoir les résultats d'un recensement de la population française entre 1800 et 1802 dans lequel il apparaît que le sex-ratio relevé est de 22/21. Notez le protocole du recensement.

> Le gouvernement, convaincu de l'utilité d'un semblable dénombrement, a bien voulu en ordonner l'exécution, à ma prière. Dans trente départements, répandus également sur toute la France, on a fait choix des communes qui pouvaient fournir les renseignements les plus précis. Leurs dénombrements ont donné 2037615 individus pour la somme totale de leurs habitants au 23 septembre 1802. Le relevé des naissances dans ces communes, pendant les années 1800, 1801 et 1802, a donné 110312 garçons et 105287 filles [...][45]

Laplace reprend l'exemple des naissances à Paris mais en le comparant cette fois à celui de l'échantillon représentatif de la France entière.

> A Paris, les baptêmes des enfants des deux sexes s'écartent un peu du rapport de 22 à 21. Depuis 1745, époque à laquelle on a commencé à distinguer les sexes sur les registres des naissances, jusqu'à la fin de 1784, on a baptisé, dans cette capitale, 393386 garçons et 377555 filles. Le rapport de ces deux nombres est à peu près celui de 25 à 24 ; il paraît donc qu'à Paris une cause particulière rapproche de l'égalité les baptêmes des deux sexes. Si l'on applique à cet objet le calcul des probabilités, on trouve qu'il y a 238 à parier contre un, en faveur de l'existence de cette cause, ce qui suffit à en autoriser la recherche.[46]

Notons que si on applique la méthode de calcul présentée dans la *Théorie analytique* la probabilité que le sex-ratio parisien soit inférieur à celui de la France est donnée par

$$\frac{(p+q+1)!}{p!\,q!}\int_0^{22/43} x^p(1-x)^q\,dx$$

ce qui donne une valeur numérique de l'ordre de 99% (sensiblement différente de 238/239). En tous cas la certitude n'est pas du même ordre de grandeur que dans la comparaison avec Londres. A partir de quelle valeur faut-il rechercher l'existence d'une cause ? Laplace ne fournit pas de réponse à cette question, mais au delà du résultat de ce calcul de probabilité c'est l'explication qui suit qui emporte la conviction.

> Depuis le commencement de 1745 jusqu'à la fin de 1809, il y est entré 163499 garçons et 159405 filles [à l'hospice des Enfans trouvés de Paris]. Le premier de ces nombres

44 Ibidem, p.423.
45 P.S. Laplace, *Essai philosophique sur les probabilités*, 4e édition, 1819, ; *in* [7] vol.1 p. LVII
46 Ibidem, p.LVIII.

> n'excède que d'un trente-huitième le second, qu'il aurait dû surpasser au moins d'un vingt-quatrième. Ce qui confirme l'existence de la cause assignée, c'est qu'en n'ayant point égard aux enfants trouvés, le rapport des naissances des garçons à celles des filles est à Paris, comme dans le reste de la France, celui de 22 à 21.[47]

La dernière affirmation de Laplace est simple à vérifier :

Évaluons le nombre d'enfants trouvés entre 1745 et 1784 par une règle de trois[48]

Nombre de garçons trouvés : $\dfrac{163499\times 40}{65}\approx 100615$

Nombre de filles trouvées : $\dfrac{159405\times 40}{65}\approx 98095$

Ce qui donne comme rapport des naissances des garçons entre 1745 et 1784 :

$\dfrac{393386-100615}{770941-198710}\approx 0{,}51163$ un nombre qui approche 22/43 à 10^{-5} près.

Pour un lecteur moderne, le traitement de cette question du sex-ratio par Laplace est à la fois familier et étranger. D'un côté nous reconnaissons les outils de calcul qui n'ont pas changé, de l'autre sa démarche diffère sensiblement de celle actuellement en vigueur. Ce type de questions relève aujourd'hui de l'inférence statistique et nous nous proposons maintenant de montrer comment une question de sex-ratio est traitée à l'aide de la théorie des tests.

Le test de significativité

Intéressons nous d'abord à un texte de Ronald Fischer, un des fondateurs de la statistique moderne, remarquable par ses qualités didactiques. Dans son ouvrage *the design of experiments* (1ère édition 1935) il propose une expérience singulière pour présenter la notion de test de significativité, prouvant au passage son sens de l'humour :

> Une Dame déclare qu'elle est capable, en goûtant une tasse de thé au lait, de distinguer si le lait ou l'infusion de thé a été versé en premier dans la tasse.
> Nous allons considérer le problème de concevoir une expérience au moyen de laquelle cette affirmation peut être testée.[49] [notre traduction]

Sa description de l'expérience peut être résumée ainsi. Quatre tasses de chacun des deux types sont préparés. Les tasses sont ensuite mélangées de manière aléatoire avant de les présenter à la Dame dont la tâche consistera à reconstituer les deux groupes de tasses. Fischer s'intéresse ensuite à l'interprétation du résultat de l'expérience et à ses fondements rationnels. Sachant que l'expérience proposée peut mener à 70 résultats différents possibles (le nombre de combinaisons de 4 éléments choisis parmi 8), il fait la remarque fondamentale suivante :

47 Ibidem
48 Il y a nécessité de faire une règle de trois car les périodes d'observation sont différentes.
49 R. A. Fisher, *The design of experiments*, Eighth Edition 1966, Chapitre II, 5 Statement of Experiment.

> Un sujet dépourvu de toute faculté de discrimination diviserait en fait les 8 tasses en deux groupes de quatre correctement une fois sur 70, ou plus exactement avec une fréquence qui approcherait de plus en plus 1/70 à mesure que le test serait répété.[50] [notre traduction]

Cette fréquence d'un succès complet dû au hasard dépend évidemment du nombre de tasses utilisées. Fischer explique ensuite comment doit se faire la prise de décision en insistant sur le fait que l'expérimentateur a le choix du seuil à partir duquel il considérera que le résultat est positif :

> L'expérimentateur a la possibilité d'être plus ou moins exigeant à l'égard de la probabilité qu'il demanderait avant d'être prêt à admettre que ses observations ont démontré un résultat positif. [...]
> Ainsi s'il souhaite ignorer des résultats ayant une probabilité supérieure à 1/20 (les probabilités étant bien sûr calculées à partir de l'hypothèse que le phénomène à démontrer est en fait absent), alors il serait utile pour lui de faire l'expérience avec seulement 3 tasses de thé de chaque type. [...]
> Il est usuel et pratique pour les expérimentateurs de prendre 5%, comme niveau standard de significativité, dans ce sens qu'ils sont disposés à ignorer tous les résultats qui échouent à atteindre ce standard, et, par ce moyen, à éliminer de la suite du débat la plus grande part des fluctuations que les effets du hasard ont introduit dans leur résultats expérimentaux.[51] [notre traduction]

Fischer ajoute un peu plus loin que dans ce genre d'expérimentation il faut bien préciser l'hypothèse qui pourra être réfutée ou pas par le résultat de l'expérience : ici l'hypothèse est que le sujet ne possède aucune capacité de discrimination ; ce qu'il nomme l'hypothèse nulle.

Un exemple contemporain

Regardons maintenant la mise en œuvre d'un test de significativité sur une question d'actualité impliquant le sex-ratio. Il s'agit d'un extrait d'un article paru en 2002 de la revue Environmental Health Perspectives intitulé *Sex Ratios of Children of Russian Pesticide Producers Exposed to Dioxin* :

> We investigated the sex ratio of children of pesticide workers who produced the biocide trichlorophenol and the herbicide 2,4,5-trichlorophenoxy acetic acid from 1961 to 1988 in the city of Ufa, Bashkortostan, Russia. [...]
> The sex ratio (fraction male) of the combined cohort of 227 children from 150 male and 48 female workers was 0.40, significantly lower (z-test for proportions = 3.21; $p < 0.001$) than those for the city of Ufa (0.512) and elsewhere worldwide.[52]

Derrière le commentaire très succinct « z-test for proportions = 3.21; $p < 0.001$ » se cache tout un raisonnement mathématique relatif au test de significativité pour une proportion. Nous allons l' expliciter en des termes qui pourraient être utilisés devant des étudiants débutants.

50 Ibidem, Chapitre II, 6 Interpretation and its Reasoned Basis.
51 Ibidem, Chapitre II, 7 The Test of Significance.
52 J. J. Ryan & alli, Sex Ratios of Russian Children in E.H.P. vol.110, n°11, 2002.

La population des enfants nés à Ufa pendant la période considérée est assimilée à une urne contenant des boules bleues et roses avec une proportion de boules bleues égale à 0,512. La population des 227 enfants des travailleurs de l'usine de pesticide est assimilable à l'observation d'un échantillon de 227 boules prélevées de façon équiprobable et avec remise dans cette urne. (C'est le test)

On se demande si le nombre de garçons observé dans l'échantillon peut être simplement le fruit du hasard (l'hypothèse testée est qu'il n'y a pas de problème de santé). Les auteurs ont choisi un seuil de significativité de 0,001.

Soit X la variable aléatoire comptant le nombre de boules bleues présentes dans un échantillon de 227 boules prélevées dans l'urne ; on sait que X suit une loi binomiale de paramètres n = 227 et p = 0,512. Il s'agit alors de déterminer la probabilité de l'événement ($X \leq 91$).[53]

Il est possible d'évaluer cette probabilité à l'aide de la loi normale :

$$P(X \leq 91{,}5) = P\left(\frac{X}{n} - p \leq \frac{91{,}5}{n} - p\right) = P\left(\frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq \frac{\left(\frac{91{,}5}{n} - p\right) \times \sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}}\right)$$

On a : $\dfrac{\left(\frac{91{,}5}{n} - p\right) \times \sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}} \approx -3{,}29$

D'après le théorème de Moivre Laplace, la probabilité cherchée est peu différente de $\Phi(-3{,}29)$ où Φ désigne la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite. Or $\Phi(-3{,}29) < 0{,}001$.

En affirmant que la différence observée dans le sex-ratio des enfants des travailleurs de l'usine de pesticide n'est pas le fruit du hasard, on prend un risque inférieur à 1/1000 de se tromper. Il est donc légitime de rechercher une cause à ce sex-ratio très faible. En fait les analyses sanguines ont révélé une concentration de TCDD 30 fois supérieure à la normale chez les travailleurs concernés …

En guise de conclusion

L'intérêt de Laplace pour la probabilité des causes et sa vision déterministe de l'univers l'ont poussé à élargir le champ d'application des probabilités. Mais sa démarche a soulevé des questions quant à la notion même de probabilité qui ont mis du temps à être éclaircies. La conception dominante actuellement, qui est celle présentée dans l'enseignement secondaire français, s'appuie sur une approche fréquentiste justifiée par la loi faible des grands nombres. La probabilité apparaît comme une propriété du phénomène étudié, ce sont des répétitions indépendantes et nombreuses du phénomène qui permettent de lui attribuer une valeur. Il s'agit d'une conception objective de la probabilité. Le test de Fischer relève de celle-ci. Pour certains[54] cette conception est trop étroite dans un monde où il faut prendre des décisions en

53 Le sex-ratio 0,4 de l'article est une approximation du rapport 91/227.
54 En particulier les néobayésiens, cf. infra.

intégrant des informations ne provenant pas de la reproduction d'événements. La probabilité devient alors une mesure du degré de confiance que l'on peut avoir vis-à-vis d'un évènement incertain, donc une conception subjective.

Il n'est pas faux de voir dans les travaux de Laplace les prémisses de l'inférence statistique, mais il vaut mieux éviter de reconsidérer la méthode de Laplace concernant le sex-ratio à l'aune des méthodes actuelles car on risquerait un contre sens. En effet les partisans de la statistique néobayésienne, qui acceptent d'utiliser des probabilités subjectives et reprennent à leur compte la formule générale de Bayes-Laplace pour obtenir l'estimation d'un paramètre, pourraient être considérés comme des héritiers de Laplace. Mais les travaux de Laplace en probabilités ne se limitent pas à l'étude du sex-ratio et si l'on examinait certaines de ses applications en astronomie on y verrait une démarche différente. Lorsque par exemple il calcule la probabilité que toutes les planètes du système solaire tournent dans le même sens et que la somme des inclinaisons de leurs orbites soient comprises entre 0gr et 91,4187gr, il le fait explicitement sous l'hypothèse que toutes les inclinaisons sont également possibles et que les deux sens de rotation sont équiprobables. Il trouve alors une valeur si petite [55] qu'il peut affirmer que « le résultat observé devient invraisemblable dans cette hypothèse [56]». Sa démarche dans ce cas n'est pas s'en rappeler celle du test de significativité de Fisher. Or les démarches néobayésiennes et fisheriennes ne sont pas compatibles, mais à l'époque de Laplace ces subtilités restent encore cachées dans les brumes de la métaphysique. À l'aide de ces critères anachroniques, il serait alors facile de juger confuse la pensée probabiliste de Laplace, mais ne serait-ce pas lui faire un procès déloyal ?

Si Laplace a exploré de nouvelles méthodes mathématiques, c'est dans l'intention de les appliquer à l'étude des lois qui régissent l'Univers ou les sociétés humaines. Ainsi son apport indubitable à l'histoire du calcul des probabilités se trouve dans les outils analytiques qu'il a été capable de développer, sans oublier le rôle qu'il a joué pour le développement des statistiques dans la gouvernance de l'Etat. Le soin à ses successeurs d'approfondir et d'organiser toutes ses découvertes.

Post-scriptum : un grand merci à Thierry Raoux pour son travail de relecture et ses remarques qui m'ont permis d'améliorer notablement cet article.

Bibliographie

Textes originaux

[1] John Arbuthnot, *An Argument for Divine Providence , taken from the Constant Regularity observed in the Births of both Sexes*, Philosophical Transactions of the Royal Society of London 27 (1710), 186–190.

[2] Sir Ronald A. Fisher, *The design of experiments*, Eighth Edition 1966, reprinted by Hafner Publishing Company, New York, 1971.

55 $\frac{1}{10!}\cdot(0{,}914187)^{10}\cdot\frac{1}{2^{10}}$

56 P.S. Laplace, *Théorie analytique des probabilités*, 3e édition, 1820 ; *in* [7] Livre II, Chapitre 2, p.281-282.

[3] Pierre Simon Laplace, *Mémoire sur la probabilité des causes par les événements,* Mémoires de l'Académie royale des Sciences de Paris (Savants Etrangers) Tome VI, p.621, 1774 ; *in Œuvres complètes de Laplace* publiées sous les auspices de l'Académie des sciences, par MM. les secrétaires perpétuels. 1878-1912, t. VIII, p.27-65.

[4] Pierre Simon Laplace, *Mémoire sur les approximations de formules qui sont fonctions de très grands nombres,* Mémoires de l'Académie royale des Sciences de Paris, année 1782 ; *in Œuvres complètes de Laplace* publiées sous les auspices de l'Académie des sciences par MM. les secrétaires perpétuels. 1878-1912, t. X, p. 209-291.

[5] *L'école Normale de l'an III Leçons de Mathématiques* sous la direction de Jean Dhombres, Edition annotée des cours de Laplace, Lagrange et Monge, Dunod, Paris, 1992.

[6] Pierre Simon Laplace, *Théorie analytique des probabilités*, Paris, 1812.

[7] Pierre Simon Laplace, *Théorie analytique des probabilités*, 3e édition, tome VII des Oeuvres de Laplace, Paris, 1847 (réimpression en deux volumes J Gabay, 1995).

[8] Pierre Rémond de Montmort, *Essay d'analyse sur les jeux de hazard,* 2e édition revûe et augmentée de plusieurs lettres, Paris, 1713.

[9] John Jake Ryan, Zarema Amirova, and Gaetan Carrier, Article *Sex Ratios of Children of Russian Pesticide Producers Exposed to Dioxin, in* Environmental Health Perspectives, Vol. 110 | N° 11 | November 2002.

Autres ouvrages

[10] Michel Armatte, Article *Contribution à l'histoire des tests laplaciens*, *in* Mathématiques & sciences humaines (44e année, n° 176, 2006(4), p. 117-133)

[11] Bernard Bru, Article *Petite histoire du calcul des probabilités*, *in* Brochure APMEP n°41, 1981

[12] Jean Pierre Lubet, Article *Laplace et la théorie analytique des probabilités*, Histoires de probabilités et de statistiques CII, Ellipses, 2004.

[13] Jean-Louis Piednoir, Article *La statistique bayésienne*, *in* Bulletin APMEP n°464, Mai-Juin 2006.

[14] Éloge historique de M. le Marquis de Laplace par Joseph Fourier, lu à la séance publique du 15 juin 1829, suivi de discours de André Danjon, A. Bigot et Jean Chazy, prononcés à l'occasion du 2e centenaire de sa naissance, Académie des Sciences ; disponible en ligne sur le site de l'Académie des Sciences : https://www.academie-sciences.fr/fr/Notes-biographiques/notes-biographiques.html.

Annexe 1 : Table des Naissances à Londres de 1629 à 1710

Extrait de la lettre de N. Bernoulli à P. Rémond de Montmort du 23 Janvier 1713, Source : BnF

Catalogue des Enfans mâles & femelles nés à Londres
depuis 1629 jusqu'à 1710.

	mâles.	femell.		mâles.	femell.
1629	5218	4683	1670	6278	5719
30	4858	4457	71	6449	6061
31	4422	4102	72	6443	6120
32	4994	4590	73	6073	5822
33	5158	4839	74	6113	5738
34	5035	4820	75	6058	5717
35	5106	4928	76	6552	5847
36	4917	4605	77	6423	6203
37	4703	4457	78	6568	6033
38	5359	4952	79	6247	6041
39	5366	4784	80	6548	6299
40	5518	5332	81	6822	6533
41	5470	5200	82	6909	6744
42	5460	4910	83	7577	7158
43	4793	4617	84	7575	7127
44	4107	3997	85	7484	7246
45	4047	3919	86	7575	7119
46	3768	3395	87	7737	7114
47	3796	3536	88	7487	7101
48	3363	3181	89	7604	7167
49	3079	2746	90	7909	7302
50	2890	2722	91	7662	7392
51	3231	2840	92	7602	7316
52	3220	2908	93	7676	7483
53	3196	2959	94	6985	6647
54	3441	3179	95	7263	6713
55	3655	3349	96	7632	7229
56	3668	3382	97	8062	7767
57	3396	3289	98	8426	7626
58	3157	3013	99	7911	7452
59	3209	2781	1700	7578	7061
60	3724	3247	1	8102	7514
61	4748	4107	2	8031	7656
62	5216	4803	3	7765	7683
63	5411	4881	4	6113	5738
64	6041	5681	5	8366	7779
65	5114	4858	6	7952	7417
66	4678	4319	7	8379	7687
67	5616	5322	8	8239	7623
68	6073	5560	9	7840	7380
69	6506	5829	10	7640	7288

Tableau du nombre de garçons rapporté à 14000 naissances par an (cf. p.14)

Année	Nb Garçons	Année	Nb Garçons	Année	Nb Garçons	Année	Nb Garçons	Année	Nb Garçons	Année	Nb Garçons
1629	7 378	1643	7 131	1657	7 112	1671	7 217	1685	7 113	1699	7 209
1630	7 301	1644	7 095	1658	7 163	1672	7 180	1686	7 217	1700	7 247
1631	7 263	1645	7 112	1659	7 500	1673	7 148	1687	7 294	1701	7 264
1632	7 295	1646	7 365	1660	7 479	1674	7 222	1688	7 185	1702	7 167
1633	7 223	1647	7 248	1661	7 507	1675	7 203	1689	7 207	1703	7 037
1634	7 153	1648	7 195	1662	7 289	1676	7 398	1690	7 279	1704	7 222
1635	7 124	1649	7 400	1663	7 360	1677	7 122	1691	7 126	1705	7 255
1636	7 229	1650	7 210	1664	7 215	1678	7 297	1692	7 134	1706	7 244
1637	7 188	1651	7 451	1665	7 180	1679	7 117	1693	7 089	1707	7 302
1638	7 276	1652	7 356	1666	7 279	1680	7 136	1694	7 174	1708	7 272
1639	7 401	1653	7 270	1667	7 188	1681	7 151	1695	7 275	1709	7 212
1640	7 120	1654	7 277	1668	7 309	1682	7 085	1696	7 190	1710	7 165
1641	7 177	1655	7 306	1669	7 384	1683	7 199	1697	7 130		
1642	7 371	1656	7 284	1670	7 326	1684	7 213	1698	7 349		

Annexe 2 : quelques calculs d'intégrales

Il s'agit uniquement dans cet annexe de donner une première idée de la méthode de Laplace, celle-ci n'étant pas toujours aisée à suivre. Nous avons ainsi été amenés à modifier certaines notations.

A) Préliminaire : calcul de $I=\int_0^1 x^p(1-x)^q\,dx$ avec p et q entiers strictement positifs.

Les résultats suivants figurent dans le mémoire de 1774 (cf. bibliographie [3]).

La méthode consiste à effectuer q intégrations par parties successives :

$$I=\frac{q}{p+1}\int_0^1 x^{p+1}(1-x)^{q-1}dx=\frac{q(q-1)}{(p+1)(p+2)}\int_0^1 x^{p+2}(1-x)^{q-2}dx=\dots$$

d'où $$I=\frac{q(q-1)\dots 1}{(p+1)(p+2)\dots(p+q)}\int_0^1 x^{p+q}dx=\frac{q!\,p!}{(p+q+1)!}$$

Laplace donne un équivalent de I quand p et q tendent vers $+\infty$, $I\sim\frac{p^p q^q}{(p+q)^{p+q}}\sqrt{\frac{2\pi pq}{(p+q)^3}}$.

On peut le retrouver en utilisant la formule de Stirling.

B) Calcul de $\int_0^{0,5} x^p(1-x)^q dx$ Notations : $y(x)=x^p(1-x)^q\,;\,a=\frac{p}{p+q}$

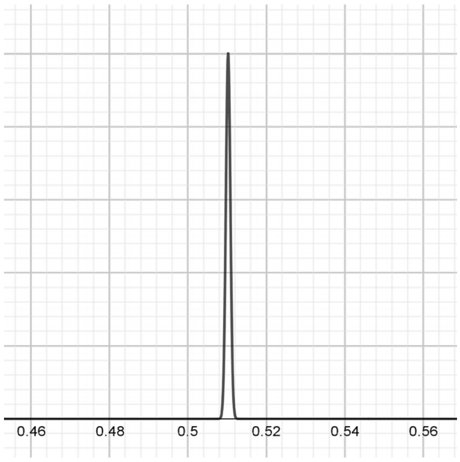
Remarque : $y(a)=\frac{p^p q^q}{(p+q)^{p+q}}$ est le maximum de la fonction y sur [0 ; 1]. On peut également montrer que la courbe représentative possède deux points d'inflexion dont un d'abscisse $x_1=a-\sqrt{\frac{a(1-a)}{p+q-1}}$

Nous suivons ici dans les grandes lignes la méthode générale présentée par Laplace dans son mémoire de 1783 (cf. biblio [4]) et reprise aux paragraphes 22, 23 & 27 du livre I de la *Théorie analytique des probabilités*.

1er cas : $J=\int_0^{0,5} x^p(1-x)^q dx$ **avec p = 393386 et q = 377555** (cf. p.20)

Quelques observations préalables :

Ici $\frac{1}{2}<x_1<a$ ($a - x_1 \cong 5{,}7.10^{-4}$ et $a - 0{,}5 \cong 0{,}101$). Notons la position du point (0,5 ; y(0,5)) sur la courbe et l'extrême petitesse du rapport $y(0{,}5)/y(a)$ qui est de l'ordre de 10^{-71} .



Dessin 5: Courbe représentative de y/I

Laplace pose le changement de variable : $y=Y\mathrm{e}^{-t}$ avec $Y=y(\frac{1}{2})=\frac{1}{2^{p+q}}$

soit $t=\ln(Y)-\ln(y)=-(p+q)\ln(2)-p\ln(x)-q ln(1-x)$

La relation précédente définit une application bijective décroissante de]0 ; 0,5] sur [0 ; +∞[. Si on note φ sa bijection réciproque l'intégrale J s'écrira alors :

$$J=-Y\int_0^{\infty}\varphi'(t)\mathrm{e}^{-t}dt \quad .$$

L'idée de Laplace est de développer φ'(t) en série de Taylor au voisinage de 0 puis d'utiliser les relations $\int_0^{\infty} t^n\mathrm{e}^{-t}dt=n!$ pour exprimer J sous forme d'une série numérique :

$$J=-Y\cdot[\varphi'(0)+\varphi''(0)+\varphi^{(3)}(0)+\ldots+\varphi^{(n)}(0)+\ldots] \quad [E_1]$$

Remarque : légitimer l'égalité précédente selon les exigences actuelles de la rigueur mathématique nécessiterait l'étude du rayon de convergence de la série de Taylor et la justification de l'intégration terme à terme finale. Ces préoccupations sont absentes à l'époque de Laplace, celui-ci se contente de vérifier la convergence de la série obtenue (cf. ci-dessous).

Laplace utilise la relation : $\varphi'=v\circ\varphi$ où $v=\frac{-y}{y'}$ [E2]

En fait Laplace écrit cette relation ainsi : $dt=\frac{dx}{v}$ *avec* $v=\frac{-ydx}{dy}$.

Ceci lui permet de calculer le développement de Taylor de φ' au point 0.

Par exemple pour le premier terme on a d'après [E_2], $\varphi'(0)=v(0,5)$.

Pour le terme suivant on a $\varphi''=\varphi'\times(v'\circ\varphi)$ d'où $\varphi''(0)=v(0,5)\cdot v'(0,5)$.

On obtiendrait de même : $\varphi^{(3)}(0)=v(0,5)\cdot[(v'(0,5))^2+v(0,5)\cdot v''(0,5)]$

Pour l'exemple qui nous intéresse : $v(x)=\dfrac{-x(1-x)}{p(1-x)-qx}$

et : $v(0,5)=\dfrac{-1}{2(p-q)};v'(0,5)=\dfrac{-(p+q)}{(p-q)^2};v''(0,5)=\dfrac{-8pq}{(p-q)^3}$.

En prenant les deux premiers termes de la série [E_1] on retrouve la valeur de l'intégrale J donnée par Laplace dans la *Théorie analytique des probabilités* (livre II, chap VI, n°28) :

$$\int_0^{0,5} x^p(1-x)^q dx=\frac{1}{2^{p+q+1}\cdot(p-q)}\cdot\left[1-\frac{p+q}{(p-q)^2}+etc.\right] \quad [E_3]$$

Ici $\dfrac{p+q}{(p-q)^2}\approx 3.10^{-3}$ et le terme suivant (inclus dans etc.) est : $\dfrac{(p+q)^2+4pq}{(p-q)^4}\approx 1,8.10^{-5}$.

Concernant la convergence de la série [E_1] dans le cas général, Laplace indique que « la formule sera très-convergente, si v ou $\dfrac{-ydx}{dy}$ est une très-petite quantité », mais il ajoute que « cette formule cesserait d'être convergente si la supposition de $x = \theta$ rendait très-petit le dénominateur de l'expression de v », θ désignant la borne supérieure de l'intégrale (ici $\theta = 0,5$ et le dénominateur de v s'annule pour $x = a$). Laplace complète par une remarque suggérant un lien entre la distance minimale $a - \theta$ pour laquelle la série reste convergente et les valeurs des exposants p et q.

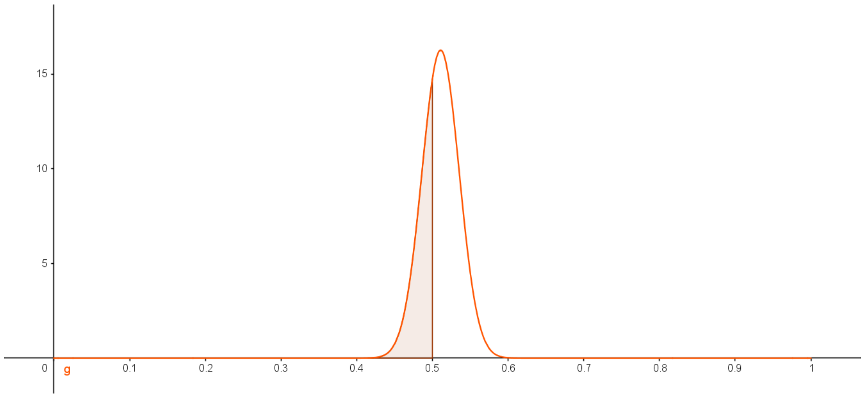
Nous avons essayé d'explorer cette piste en comparant la valeur de J/I donnée par la formule de Laplace (limitée aux trois premiers termes de la série entre crochets de [E_3]) avec la valeur calculée par le tableur pour la loi bêta. Le tableau suivant donne un extrait des résultats de ces calculs qui en dira plus qu'un long discours (la valeur de x_1 permet de situer le point d'abscisse 0,5 sur la courbe) :

a = 0,51 et p+q =	Formule de Laplace	Calcul loi bêta	Erreur relative	x_1 =
500	37,1	0,328	11200 %	0,488
2500	0,484	0,159	205 %	0,5
5000	0,1038	0,0787	31,9 %	0,503
10000	0,0236	0,0228	3,8 %	0,505
15000	0,00721	0,00715	0,8 %	0,506

2ᵉ cas : calcul de $K=\int_0^{0,5} x^p(1-x)^q\,dx$ avec **p = 212 et q = 203** (cf. p.21)

Remarque : le changement de variable t = 1 – x montre que $K=\int_{0,5}^{1} t^{203}(1-t)^{212}\,dt$ *qui est l'intégrale figurant dans la formule page* 21.

Ici $x_1<\frac{1}{2}<a$ et $y(\frac{1}{2})\approx 0{,}9\times y(a)$; la situation n'est pas la même que dans le premier cas, l'étude sur tableur permet de conjecturer que la méthode précédente ne sera pas appropriée.



Dessin 6: l'aire colorée représente le quotient des intégrales K et I

De fait Laplace indique (au paragraphe 26 du livre II de la *Théorie analytique des probabilités*) que la formule précédente devient ici divergente et qu'il faut employer l'autre formule. Effectivement le calcul des premiers termes de l'expression entre crochets de [E₃] donne dans ce cas : 1 – 5,123 + 52,487 ; ce qui laisse mal augurer de la suite...

Laplace pose donc le changement de variable : $y=Y\,\mathrm{e}^{-t^2}$ avec $Y=y(a)=\frac{p^p q^q}{(p+q)^{p+q}}$

soit $t=\sqrt{\ln(Y)-\ln(y)}=\sqrt{p\ln(\frac{a}{x})+q\ln(\frac{1-a}{1-x})}$

La relation précédente définit une application bijective décroissante de]0 ; a] sur [0 ; +∞[. Si on note ψ sa bijection réciproque l'intégrale K s'écrira alors :

$$K=-Y\int_T^{\infty}\psi'(t)\,\mathrm{e}^{-t^2}\,dt \quad \text{avec} \quad T=\sqrt{p\ln(2a)+q\ln(2(1-a))}\ .$$

Il faut ensuite développer ψ'(t) en série de Taylor au point 0 et intégrer terme à terme pour obtenir l'expession de K sous forme d'une série. (*Les réserves émises ci-dessus sur l'utilisation des séries par Laplace sont toujours en vigueur ...*)

Pour effectuer le calcul Laplace introduit la fonction v définie par : $v(x)=\frac{x-a}{\sqrt{\ln(Y)-\ln(y)}}$

Cette fonction (ou plus exactement son prolongement par continuité) admet des dérivées successives au point *a*.

La relation $\psi(t)=a+t\cdot v(\psi(t))$ permet d'exprimer les dérivées successives de ψ au point 0 en fonction des dérivées successives de *v* au point *a* .

En effet $\psi'(t)=v(\psi(t))+t\cdot\psi'(t)v'(\psi(t))$ et ψ(0) = *a* donc ψ'(0) = *v*(*a*).

Puis $\psi''(t)=\frac{d}{dt}[v(\psi(t))+t\cdot\psi'(t)v'(\psi(t))]=2\psi'(t)v'(\psi(t))+\frac{t\cdot d}{dt}[\psi'(t)v'(\psi(t))]$ d'où

$\psi''(0)=2v(a)\cdot v'(a)=(v^2)'(a)$.

Suivant la suggestion de Laplace pour déterminer plus facilement *v*(*a*) et $(v^2)'(a)$ nous allons utiliser un développement limité.

Au voisinage du point *a* on a :

$$\ln(Y)-\ln(y)=\frac{(x-a)^2\cdot(p+q)^3}{2pq}[1+\frac{(x-a)\cdot 2(p+q)(p-q)}{3pq}+O(x-a)^2]$$

On en déduit facilement que :

$$v(a)=-\sqrt{\frac{2pq}{(p+q)^3}} \quad \text{et} \quad (v^2)'(a)=\frac{2pq}{(p+q)^3}\cdot\frac{-2(p^2-q^2)}{3pq}=\frac{-4(p^2-q^2)}{3(p+q)^3}$$

Pour les calculs numériques, Laplace se limite souvent aux deux premiers termes de la série :

$$K\approx -Y\int_T^\infty e^{-t^2}\cdot(\psi'(0)+t\psi''(0))dt \quad \text{d'où} \quad K\approx Y\sqrt{\frac{2pq}{(p+q)^3}}\int_T^\infty e^{-t^2}+Y\frac{p^2-q^2}{(p+q)^3}\cdot\frac{2e^{-T^2}}{3}$$

Remarquons que cette méthode permet également à Laplace de déterminer une expression de l'intégrale I sous forme de série (livre II, chap VI, n°28) :

$$I=\frac{p^p q^q}{(p+q)^{p+q}}\sqrt{\frac{2\pi pq}{(p+q)^3}}\cdot[1+\frac{(p+q)^2-13pq}{12pq(p+q)}+etc.]$$

Laplace cherche à calculer une probabilité P égale à K/I, il obtient après réduction :

$$P\approx\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_T^\infty e^{-t^2}dt+\frac{\sqrt{2}(p-q)e^{-T^2}}{3\sqrt{(p+q)\pi pq}} \quad .$$

C'est l'expression qui figure dans le *mémoire sur l'approximation des formules*. Dans la *théorie analytique*, Laplace indique que « la formule […] se réduit à fort peu près à son premier terme » (cf. p 21) ; la valeur numérique calculée par Laplace 0,33 est conforme à celle donnée par un tableur avec la loi bêta.