# CONCEPT DE FONCTION CHEZ EULER ET APERÇU SUR SON ÉVOLUTION HISTORIQUE

Mustapha Rachidi

A la mémoire de mon ami Mahjoub Fadel

#### 1. Introduction

Depuis les prémices de la naissance du concept de fonction jusqu'à nos jours, la définition de la notion de fonction s'est déclinée sous différentes formulations (voir Annexe 1). On peut alors s'interroger sur comment on est passé de l'idée de relation entre quantités, très ancienne chez les babyloniens, à la forme actuelle d'une correspondance entre ensembles, qui à chaque élément de l'ensemble de départ associe un élément de l'ensemble d'arrivée ? La plupart des travaux qui abordent l'histoire du concept de fonction s'accordent à distinguer cinq étapes dans cette évolution. Le tableau des valeurs d'une fonction est la première étape de la représentation du concept de fonction. En deuxième étape, vient la représentation géométrique et mécanique d'une fonction. En troisième étape, il y a la représentation d'une fonction par une expression analytique, ensuite l'étape de la représentation d'une fonction comme correspondance quelconque, et en dernière étape la définition ensembliste du concept de fonction (voir [11]).

Les historiens parlent de l'instinct de fonctionnalité chez les anciens (Babyloniens, Indiens, Grecs et Arabes). Mais cet instinct de fonctionnalité est loin de sa perception en tant que notion liée au concept de fonction. En effet, comme l'a souligné A. P. Youschekevitch « La pensée mathématique de l'Antiquité n'a créé aucune notion générale ni de quantité variable ni de fonction » (voir [14]). Cependant, les prémices du concept de fonction ont commencé à émerger avec l'étude cinématique des mouvements rectilignes au 14e siècle. On peut dire que le germe de fonction affine est présent dans les travaux de N. Oresme, qui donne les premières représentations graphiques des mouvements rectilignes. Du 14e siècle à la première moitié du 17<sup>e</sup> siècle, les courbes vont être étudiées graphiquement, verbalement ou à l'aide de table. Les travaux de Descartes et Fermat vont permettre d'étudier les courbes par le biais de méthodes algébriques. Ainsi, à l'étude des courbes par leurs propriétés géométriques, est substituée leur étude par des procédés analytiques. Par conséquent, courbes et fonctions sont identiques, cette approche est appelée : représentation géométrique. Vers la fin du 17e siècle avec la fondation du calcul infinitésimal par Newton et Leibniz apparait une nouvelle approche, à savoir l'approche infinitésimale. Ainsi, l'algébrisation de l'analyse par Leibniz l'a conduit à utiliser pour la première fois le terme « fonction » pour désigner « une quantité qui varie d'un point à un autre point (et qui est donnée par une équation); comme par exemple la longueur d'un segment qui varie, etc...» (voir [14]).

Au début du 18° siècle, Euler débarrasse le calcul infinitésimal de son support géométrique, en utilisant le terme « expression analytique », qu'il dénomme « fonction », définition adoptée et développée par ses successeurs. Il semble qu'il y a une unanimité sur le fait que l'ouvrage d'Euler [5] était le premier livre didactique qui a posé les bases à l'origine de l'émergence de l'analyse et du calcul différentiel. Par ailleurs, la controverse d'Euler et de d'Alembert sur les solutions du problème des cordes vibrantes, et leurs développements en séries, dont D. Bernoulli a donné des solutions sous forme trigonométrique, a conduit au 19e siècle à la question importante suivante « Est-ce que les fonctions arbitraires au sens d'Euler peuvent être représentées par une série trigonométrique ? ». L'étude de la convergence des séries de Fourier, contraint les mathématiciens à considérer de très vastes classes de fonctions, dépassant les limites des aspects algébriques ou géométriques du concept. En effet, il y a nécessité d'une clarification rigoureuse et précise, de la définition élémentaire et générale de la notion de fonction. Par ailleurs, cet effort a conduit à la définition ensembliste que nous utilisons aujourd'hui. L'histoire n'est jamais achevée, car cette définition ensembliste s'est révélée trop étroite pour certains problèmes issus des mathématiques ou de la technologie (électronique) ; il a fallu considérer des fonctions généralisées ou les distributions. Est-ce que les distributions représentent la fin du travail sur la définition du concept de fonction ?

La présente note a pour objectif d'apporter un aperçu succinct sur le processus historique ayant conduit à la mise en place du concept de fonction, en prenant comme origine l'approche de ce concept due à Euler. Plus précisément, il s'agit de comprendre les principales étapes de l'évolution du concept de fonction, et des difficultés qui ont jalonné ce processus. Afin de mieux cerner son aspect historique et sa mise en place, il nous a semblé plus approprié de considérer d'abord la définition que lui a donnée Euler. En effet, c'est Euler qui avait donné la (les) première(s) définition(s) du concept de fonction, et ses travaux vont nous apporter un éclairage sur les périodes « pré-concept » et « post-concept » de cette notion. Plus précisément, nous avons opté de nous y pencher sur les périodes « pré-Eulériennes » et « post-Eulériennes », afin de mieux cerner l'évolution historique de la mise en place du concept de fonction. Enfin, nous apporterons quelques éléments sur l'apparition de la notion de fonction dans les programmes de l'enseignement des mathématiques en France.

#### 2. Concept de fonction chez Euler

#### 2.1. De Bernoulli à Euler

Selon A. P. Youschkevitch, la première définition explicite d'une fonction comme expression analytique est due à Bernoulli (1667-1748), qui écrit : «On appelle fonction d'une grandeur variable une quantité composée de n'importe quelle manière que ce soit de cette grandeur variable et de constantes.» (voir [14]). Toujours, selon Youschkevitch, cette définition a été donnée dans un article intitulé « Remarques sur ce qu'on a trouvé jusqu'ici de solutions des problèmes sur les isopérimètres» (Mémoires de l'Académie des Sciences, 1718).

Dans sa définition, Bernoulli ne donne pas de précision sur la façon dont sont constituées les fonctions à partir de la variable indépendante (ou libre) par laquelle on exprime la fonction. Cette précision va être apportée par Euler, qui a publié un article intitulé « une fonction arbitraire de x/a + c », dans une note de l'Académie de Saint Petersbourg (1734), où

il a introduit la notation f(x/a+c). Ensuite, Euler reprend la définition de Bernoulli en ajoutant le mot « expression analytique » à la place de « quantité », « ... en conséquence toute expression analytique dans laquelle, à côté de la variable z, toutes les quantités qui composent cette expression sont des constantes, est une fonction de cette même z; ainsi a + 3z, etc. ». En 1740, Euler propose la notation « f(x) » et les représentations par une ou plusieurs formules.

#### 2.2. Définitions d'Euler

Dans son traité « *Introduction à l'analyse infinitésimale* » (voir [5]), qui a été publié en latin en 1748 et traduit en français en 1796, Euler parle de la nécessité de l'algèbre pour s'élever à la connaissance de l'analyse. De plus, il fait du concept de fonction l'objet essentiel de l'analyse et à cette fin il utilise l'algèbre comme un outil fondamental. Ainsi, le concept de fonction est libéré des considérations cinématiques et géométriques.

Dans son ouvrage [5], Euler commence par introduire les premières notions liées au concept de fonction. Voici les étapes caractéristiques de la définition d'Euler (voir Annexe 2):

- (1) une quantité constante est une quantité déterminée, qui conserve toujours la même valeur.
- (2) une quantité variable est une quantité indéterminée, ou, si l'on veut, une quantité universelle, qui comprend toutes les valeurs déterminées.
- (3) une quantité variable devient déterminée, lorsqu'on lui attribue une valeur déterminée quelconque.
- (4) une fonction de quantité variable est une expression analytique composée, de quelque manière que ce soit, de cette même quantité et de nombres, ou de quantités constantes.
  - (5) une fonction d'une variable est donc aussi une quantité variable.

Après chaque définition, Euler insère un commentaire et/ou des exemples pour détailler et motiver sa définition. En particulier, on constate qu'Euler a d'abord essayé d'éclaircir l'idée de quantité constante et de quantité variable, avant de donner sa définition fondamentale : « Une fonction de quantité variable est une expression analytique composée, de quelque manière que ce soit, de cette même quantité et de nombres, ou de quantités constantes. »

Pour préciser sa définition, Euler distingue les fonctions selon la combinaison de la variable et des quantités constantes qui les constituent. Cette différence dépend des opérations par lesquelles les quantités peuvent être composées et combinées entre elles. Les opérations considérées par Euler sont des opérations algébriques essentiellement : addition et soustraction, multiplication et division, la puissance et les racines, ainsi que les résolutions d'équations. Par ailleurs, Euler précise qu'outre les opérations algébriques précédentes, il y en a d'autres, appelées transcendantes telles que les exponentielles, les logarithmes et d'autres issues du calcul intégral.

Comme Oresme avec sa classification des qualités (voir § 4), les définitions et données

précédentes ont amené Euler à envisager une classification des fonctions. En effet, Euler divise l'ensemble des fonctions en deux grandes classes : les fonctions algébriques et les fonctions transcendantes.

La classe des fonctions algébriques est constituée des fonctions rationnelles et des fonctions irrationnelles. Les premières sont formées à l'aide des quatre opérations algébriques seulement, et leur ensemble est constitué des fonctions entières (les fonctions polynômes actuelles) et des fonctions fractionnaires (les fonctions rationnelles actuelles). La classe des fonctions irrationnelles est divisée en fonctions implicites et fonctions explicites. Les fonctions implicites sont issues de la résolution des équations. Euler pense que c'est l'insuffisance de l'algèbre qui est un obstacle pour rendre ces fonctions explicites. Notons que la classe des fonctions transcendantes est restée très vague chez Euler.

Ensuite, Euler est amené au classement des fonctions en uniformes et fonctions multiformes. Les fonctions uniformes sont celles qui ont une seule valeur pour une valeur déterminée de la variable ; comme les fonctions rationnelles. Les fonctions multiformes sont celles qui admettent plusieurs valeurs pour une valeur donnée de la variable ; comme celles qui sont définies par une équation algébrique de degré n. Notons qu'aujourd'hui, seules les fonctions uniformes ont le statut de fonctions.

#### 2.3. La continuité & le développement en séries entières selon Euler

Euler a également abordé la notion de continuité des fonctions. Cette propriété est bien décrite par C. Houzel « Au livre II de l'Introducio, Euler développe les applications du concept de fonction à la géométrie. En portant en ordonnées les valeurs d'une fonction y de x, dont les valeurs sont portées en abscisses, on obtient une courbe ; inversement si une courbe est donnée on peut la considérer comme associée de la manière précédente à une ou plusieurs fonctions. Euler distingue ainsi les « courbes continues » (ou régulières) qui sont définies par une seule formule, et les « courbes discontinues » (ou mixtes ou irrégulières) dont la représentation nécessite plusieurs fonctions diverses » (voir [5]).

Ainsi, on peut dire qu'Euler considère qu'une fonction définie par une seule expression analytique est continue, alors qu'une fonction définie (sur une réunion d'intervalles) par des expressions différentes est discontinue. Par ailleurs, les fonctions définies par une unique expression analytique dans leur domaine, sont considérées comme fonctions. Tandis que celles qui ont plusieurs expressions différentes (ou les courbes correspondantes) ne sont pas de véritables fonctions. Cependant, des problèmes issus de la physique, en particulier le problème des cordes vibrantes, vont conduire Euler à revoir sa définition fondamentale d'une fonction, ainsi que sa conception sur la continuité.

Euler s'est également penché sur le développement en séries des fonctions. En effet, le chapitre IV du traité d'Euler commence ainsi, « La formule  $A+Bz+Cz^2+Dz^3+...$  en ne prenant qu'un nombre fini de termes, ne peut représenter ni les fonctions fractionnaires, ni les fonctions irrationnelles de z; néanmoins, on cherche ordinairement pour les exprimer une suite de même forme, qu'on suppose composée d'une infinité de termes ».

Pour plus de généralité, Euler étend cette formule à des exposants quelconques. Ainsi, pour

Euler toute fonction de z peut être transformée en une série infinie de la forme :

$$A+Bz^{\alpha}+Cz^{\beta}+Dz^{\gamma}+\dots$$

où  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  sont des nombres quelconques, et constate que toutes les fonctions qu'il a étudiées sont développables en séries. Il ne donne aucune preuve de ce résultat. Effectivement, toutes les fonctions considérées par Euler sont analytiques au sens actuel, ou analytique par morceaux (où le domaine d'analycité est connexe). En fait, Euler se satisfait du calcul des coefficients sans se préoccuper de la convergence de la série ou de sa limite. On peut dire, que selon Euler, toute fonction peut être transformée en série infinie.

#### 2.4. Aspect théorique et didactique de la définition fondamentale d'Euler

Dans la définition fondamentale d'Euler, il y a également un élément qui peut nous aider à comprendre ses idées sur le concept de fonction, à savoir : l'idée du « **temps physique** », qui est implicite dans son expression : « qui conserve toujours ...».

Par ailleurs, la présence du **temps** chez Euler va jouer un rôle important. En effet, derrière cette notion, on va trouver la notion de continuité. En fait, pour Euler, le continu restera dans un domaine physique, puisque la droite réelle n'existe pas sous forme numérique dans ces travaux (la droite numérique achevée est du XIX<sup>e</sup> siècle).

Dans cette définition, il n'y a pas de notion de domaine de définition, ni de valeurs interdites, ni d'usage de la notation f(x).

Sur le plan didactique, on constate que les exemples de fonctions fournis par Euler font partie de notre spectre actuel de fonctions :

- « Ainsi, toute expression analytique, soit de la variable z et contenant des quantités constantes, est une fonction de z. Par exemple: a+3z; az-4zz;  $az+b\sqrt{aa-zz}$ ; cz & c, sont des fonctions de z. »
- « ... Au reste, il n'est pas rare de rencontrer des expressions qui ne sont que des fonctions apparentes; car, quelque valeur qu'on donne à la variable, elles conservent toujours la même valeur, comme z<sup>0</sup>; l<sup>z</sup>; (aa-az)/(a-z). Ces expressions, sous la forme apparente de fonctions de variables, sont réellement des quantités constantes ».

Les derniers exemples et le dernier point (5), de la définition d'Euler, ont pour conséquence l'exclusion des fonctions constantes : « fonctions apparentes qui ne sont pas des fonctions ». L'élimination des fonctions constantes est une nécessité pour Euler, puisque, dans le chapitre suivant, il va travailler sur la composition des fonctions.

En conclusion, on peut dire qu'une fonction au sens d'Euler est : « une fonction de la variable réelle, non constante, définie par une expression analytique».

**Remarque 2.1**. Les notations littérales de Viète, Stevin, Descartes, ont renforcé le point de vue algébrique, pour lequel une fonction générale est une combinaison de fonctions de base, obtenue à partir de celles-ci par les quatre opérations, la composition, voire le passage à la limite ou à une primitive ou la sommation de séries. C'est ce point de vue qui a amené Euler à adopter cette démarche en 1748, dans son « *Introduction à l'Analyse Infinitésimale* » [5].

**Remarque 2.2**. La définition de la continuité selon Euler, sera remise en cause par Cauchy (en 1844), qui va donner un exemple de fonction mixte et continue au sens définie par Euler.

#### 3. ÉVOLUTION DU CONCEPT DE FONCTION CHEZ EULER

#### 3.1. Problème des cordes vibrantes

Il s'agit d'une corde de longueur  $\ell$  fixée à ses deux extrémités et qui vibre dans un plan. Le problème consiste à étudier les mouvements de cette corde c.-à-d. calculer à l'instant t l'ordonnée y=y(t, x) d'un point de la corde d'abscisse x. En 1747, d'Alembert montre que y=y(t, x) vérifie l'équation aux dérivées partielles suivantes,

(E): 
$$\partial^2 y/\partial t^2 = a^2 \partial^2 y/\partial x^2$$
 où a>0,

dont il détermine la solution générale sous la forme,

$$y(t, x) = \frac{1}{2} [f(at+x)+g(at-x)],$$

où f et g sont des fonctions deux fois différentiables, avec les conditions aux limites :

$$y(t, 0) = y(t, \ell) = 0$$
 (extrémités fixes),  $y(0, x) = f(x)$  (forme initiale de la corde).

Pour d'Alembert la solution se présente sous la forme suivante :

$$y(t,x) = \frac{1}{2} [f(at+x) + f(at-x)],$$

pour tout x dans l'intervalle  $[0, \ell]$ , où f est une fonction impaire, périodique de période  $T = 2\ell$  et deux fois différentiable (sauf peut être en des point isolés). De plus, d'Alembert impose des restrictions sur la forme initiale de la corde.

#### 3.2. La controverse d'Alembert–Euler et la nouvelle définition d'Euler

Pour la solution des cordes vibrantes, le statut des fonctions f et g pose un problème. En effet, d'Alembert pense qu'elles doivent être « analytiques », c'est-à-dire exprimables par une formule, et D. Bernoulli donne des solutions sous forme trigonométriques.

Quant à Euler, il affirme que f et g peuvent être arbitraires, correspondant à des courbes tracées « à main libre ». Il répond à d'Alembert que : « La première vibration dépend de notre bon plaisir, puisqu'on peut, avant de lâcher la corde, lui donner une figure quelconque ; ce qui fait que le mouvement vibratoire de la corde peut varier à l'infini, suivant qu'on donne à la corde telle ou telle figure au commencement du mouvement » (voir [16] p. 29).

La position d'Euler est en contradiction avec sa définition de 1748. Mais Euler prend conscience de l'insuffisance de la classe des fonctions qu'il a considérées jusqu'à présent, du moins en ce qui concerne la représentation de la position initiale des cordes vibrantes. C'est ainsi, qu'en 1755 Euler fut amené à revoir sa première définition, en proposant :

« Si certaines quantités dépendent d'autres quantités de telle manière que si les dernières changent, les premières quantités changent aussi, alors on a l'habitude de nommer ces quantités fonctions de ces dernières; cette dénomination a la plus grande étendue et contient en elle-même toutes les manières par lesquelles une quantité peut être déterminée par

d'autres. Si, par conséquent, x désigne une quantité variable, alors toutes les autres quantités qui dépendent de x de n'importe quelle manière, ou qui sont déterminées par x, sont appelées fonctions de x. » (voir [16] p. 31).

Par conséquent, Euler libère le concept de fonction de l'expression : « expression analytique » pour devenir une relation de dépendance entre quantités variables.

Le travail d'Euler était à l'origine des fondements de l'analyse au 19° siècle. En fait, comme nous l'avons signalé, la théorie d'Euler a été basée sur des travaux antérieurs. En effet, la plupart des historiens s'accordent sur deux périodes dans l'évolution du concept de fonction à savoir : période pré-conceptuelle où l'instinct de fonctionnalité prédomine, et la période post-conceptuelle. Dans cette dernière période, on distingue les quatre étapes suivantes : "approche géométrique et mécanique d'une fonction"; "fonction vue comme expression analytique"; "fonction vue comme correspondance quelconque" et "définition ensembliste".

Afin de mieux cerner l'apport et la contribution d'Euler, on se propose de présenter dans les paragraphes §4 et §5, quelques éléments sur ces deux périodes. Pour des raisons de cohérence avec les §2 et §3, on a opté de considérer les deux périodes suivantes : Période Pré Eulérienne et Période Post Eulérienne.

#### 4. ÉVOLUTION DU CONCEPT DE FONCTION : PÉRIODE PRÉ EULÉRIENNE

#### 4.1- Représentation par un tableau de valeurs.

Tout d'abord, la première représentation remonte à l'époque de Babylone, où on utilisait déjà des tables de carrés, de cubes, ainsi que des tables de racines carrées et de racines cubiques. Les babyloniens utilisaient également des tables d'éphémérides, sur la position des astres tels que le soleil et la lune. De telles tables, sont mieux comprises par le biais du système géocentrique de Ptolémée.

L'utilisation des tables pour lier deux quantités, a été largement répandue dans l'antiquité. Les pythagoriciens les ont utilisées pour étudier des lois reliant les hauteurs des sons émis par des cordes et les longueurs de celles-ci. Les premières tables de corde ont été dressées par Hipparque, Menelaus et Ptolémée. Cependant, c'est uniquement celles de ce dernier qui nous sont parvenues. Vers l'an 500, le mathématicien indien Aryabatha donna les premières tables de sinus. Les savants arabo-musulmans améliorèrent plus tard ces tables, et en établissent d'autres (voir [12]).

Ensuite, au centre de l'astronomie en Andalousie, plusieurs tables de très grandes précisions ont été élaborées telles que les tables hachémites, tables de Tolède, alphonsines, ... Après que Copernic (1473-1543) eût fait connaître le nouveau système du monde, le nombre de tables astronomiques avec une grande précision s'est accru grâce cette découverte. Copernic a publié en 1543, une nouvelle collection de tables de mouvements célestes, fruit d'une trentaine années d'observations et d'études. La précision de ces tables a été corrigée et augmentée. Ensuite, après de longues années d'effort, les travaux de Kepler sur les tables de Copernic aboutissent à la découverte des trois célèbres lois du mouvement des corps autour du Soleil. Les lois de Kepler donnaient des résultats très précis pour l'époque. Le 18e siècle et

19° siècle représentent l'âge d'or de l'astronomie qui s'est appuyée sur des éphémérides de plus en plus précises. En France, le Bureau des Longitudes, fondé le 25 juin 1795, par la Convention Nationale (Première Assemblée Nationale), a perpétué l'usage des tables. Ce travail a pour objectifs « de résoudre les problèmes astronomiques liés à la détermination de la longitude en mer, stratégique à l'époque (d'où son nom), de calculer et publier les éphémérides (Appelés par continuité : la Connaissance des Temps) et un annuaire, c'est-à-dire une sorte de calendrier officiel « propre à régler ceux de la République », d'organiser des expéditions scientifiques dans les domaines voisins tels que la géophysique et enfin d'être un comité consultatif pour des problèmes scientifiques. L'observatoire de Paris fut placé sous la tutelle du Bureau des Longitudes de 1795 à 1854 » (voir [7] pour plus de détails).

Les tables utilisées depuis sont conçues comme des relations entre ensembles finis de quantités constantes. Dans cette représentation du concept de fonction par une table de valeurs, il ne figure aucune idée de quantités variables ou de symbolisme algébrique ou analytique. Les historiens parlent de la présence de « *l'instinct de fonctionnalité* » chez les anciens. Mais il y a une grande différence entre cet instinct de fonctionnalité et la perception du concept de fonction, qui a commencé à émerger dès le 14° siècle, grâce à l'étude de la cinématique des mouvements, à l'aide de laquelle les mathématiques commencent à être considérées comme « *l'instrument de connaissance des phénomènes naturels* » (voir [11]).

#### 4.2- Représentation géométrique et mécanique d'une fonction.

Au 14<sup>e</sup> siècle la notion de tableau de valeurs reliant deux quantités, va commencer à changer de nature dans les écoles de d'Oxford et de Paris, où le statut des mathématiques devient « *l'instrument de connaissance des phénomènes naturels* » (voir [11]). Ainsi, dans l'étude de la cinématique et de la mécanique, on commence à rechercher la quantification de certaines quantités et de certaines formes. En effet, en cherchant à quantifier la chaleur, la lumière, la densité, la distance et la vitesse par le biais de «degré d'intensité », on a introduit alors la notion de «variable continue » entre des limites fixées.

La cinématique va alors se développer au 14° siècle, en tant que branche de la mécanique, mais elle reste liée à la géométrie. Avec les premiers pas en cinématique apparaissent les notions de « vitesse instantanée » et d'« accélération ». Parmi les pionniers sur ce sujet on peut citer Roger Bacon, William Heytesbury, Richard Swineshead et Nicolas Oresme. On leur doit la première représentation graphique d'une « fonction » à l'aide de :

- degré d'intensité sur une ligne verticale,
- extension sur une ligne horizontale.

Il s'agit de l'ancêtre du repère orthogonal actuel.

Plus précisément, pour étudier les mouvements physiques, N. Oresme fut amené à les repérer graphiquement, et avec lui on assiste pour la première fois à une représentation graphique des mouvements rectilignes grâce à cette théorie de la latitude des formes. A l'époque, le théorème de Merton fait autorité. Ce théorème s'énonce comme « La distance parcourue par un corps se déplaçant suivant un mouvement uniformément accéléré, est celle qu'aurait parcourue un autre mobile se déplaçant suivant un mouvement uniforme pendant le

même intervalle de temps avec une vitesse égale à celle qu'aurait le premier corps à la moitié de son parcours » (voir [14], [15]). Grâce à ce théorème de Merton, Oresme propose une classification des qualités en trois sortes :

- uniforme ou d'intensité égale dans toutes ses parties,
- uniformément difforme terminée à un degré nul,
- uniformément difforme terminée de part et d'autre à un certain degré.

Du 14<sup>e</sup> siècle à la fin du 16<sup>e</sup> siècle les courbes sont étudiées à partir de leurs propriétés géométriques, ou graphiquement, ou à l'aide d'expressions verbales ou de tables. La théorie de la latitude des formes va jouir d'une grande renommée durant le 15<sup>e</sup> siècle et le début du 16<sup>e</sup> siècle. Notons que la fonction logarithme est la dernière fonction à être introduite, par Néper en 1619, à l'aide du langage ancien et par des considérations cinématiques.

Remarque 4.1. Avec la création de l'algèbre littérale symbolique par Viète en 1591, on va assister à une nouvelle transformation du concept de fonction, à savoir sa représentation par une formule. Par ailleurs, la célèbre phrase de Galilée « Le grand livre de l'univers ... est écrit en langage mathématique » (1623), va également contribuer à développer le travail sur le concept de fonction à travers l'étude des mouvements et de la cinématique.

#### 4.3- Représentation d'une fonction par une expression analytique.

Une autre impulsion va être donnée au concept de fonction avec le prélude de Viète, l'influence des écrits de Galilée, ainsi que la naissance de la géométrie analytique avec Descartes et Fermat. En effet, la géométrie analytique va permettre l'étude des courbes par les méthodes de calcul, c'est-à-dire l'algèbre. A l'étude sur des figures par leurs propriétés géométriques, est substituée l'étude par des éléments analytiques. On parle alors de fonction en parlant de courbe. C'est ce qu'on appelle la représentation géométrique d'une fonction. En fait, avec Descartes et Fermat, le concept de fonction va être identifié à celle d'une équation entre x et y. Par ailleurs, Descartes distingue deux types de courbes :

- les courbes géométriques susceptibles d'être représentées par une équation algébrique P(x;y)=0, où P est un polynôme, telles que les coniques.
  - et les courbes mécaniques telles que la cycloïde (dite aussi la roulette).

Au milieu du 17<sup>e</sup> siècle, le champ du concept de fonction a été élargi grâce à Mercator, Grégory et Newton à partir de la découverte du développement en série entière des fonctions. Ainsi, Grégory définit une fonction comme étant : « une quantité obtenue à partir d'autres quantités par une succession d'opérations algébriques ou par n'importe quelle opération imaginable » (Grégory : Vera circuli et hyperbolae quadratura, 1667).

Dans la seconde moitié du 17° siècle l'analyse infinitésimale est fondée par Newton et Leibniz. Newton considère les notions de « *Fluentes* » et de « *fluxions* ». Les Fluentes sont des quantités qu'il considère comme produites par une augmentation continuelle à la manière de l'espace que décrit un corps en mouvement, et les « fluxions », sont les vitesses dont les fluentes sont augmentées par le mouvement qui les produit. En fait, la notion de fluente chez Newton est une fonction du temps (distance parcourue par un mobile), et la « *fluxion* » est la

dérivée de la fluente par rapport au temps (la vitesse du mobile). Il est à noter que Newton s'appuie sur une analogie avec la distance parcourue par un mobile pour définir ses fluentes, mais celles-ci ne se limitent pas à cet exemple cinématique. D'autre part, l'algébrisation de l'analyse est une réalisation importante de Leibniz, qui a introduit aussi la notion de « différentielle ». Il utilise pour la première fois le terme de « fonction » pour désigner des segments de droites. Il s'agit d'un sens vague du concept de fonction : « J'appelle fonction toutes les portions de lignes droites qu'on fait en menant des droites indéfinies qui répondent au point fixe et aux points de la courbe ; comme sont abscisse, ordonnée, corde, tangente, perpendiculaire, sous-tangente, sous-perpendiculaire ... et une infinité d'autres d'une construction plus composée, qu'on ne peut figurer » (Leibniz : La méthode inverse des tangentes ou à propos des fonctions – 1673). Cette approche sera appelée « représentation infinitésimale ».

Dans le calcul infinitésimal de Newton et Leibniz l'objet d'étude n'est plus le nombre, mais plutôt la loi de variation. En plus, Leibniz introduit aussi l'utilisation des notions de : constante, variable, coordonnées, dont l'usage deviendra courant grâce au premier traité d'analyse du Marquis de l'Hospital : *Analyse des infiniment petits*. En 1718, Jean Bernoulli donne la première définition explicite d'une fonction comme expression analytique : « *On appelle fonction d'une grandeur variable une quantité composée de quelque manière que ce soit, de cette grandeur variable et de constantes* », et il introduit la notation « fx ».

Enfin arrive, le livre d'Euler [5] qui est le premier dans lequel le concept de fonction est à la base de l'analyse. Euler débarrasse le calcul infinitésimal de son support géométrique, il l'étudie en utilisant des « expressions analytiques » (algébriques) qu'il appelle fonction.

#### 5. ÉVOLUTION DU CONCEPT DE FONCTION : PÉRIODE POST EULÉRIENNE

Rappelons qu'Euler a libéré le concept de fonction de l'« expression analytique », et que ce concept est devenu une relation de dépendance entre quantités variables. Plus précisément, on a constaté que l'aspect algébrique et quantitatif a dominé dans l'introduction du concept de fonction chez Euler. Sa conception sur la continuité l'a empêché d'aller vers une généralisation de la théorie des fonctions. Cette généralisation va être l'un des sujets majeurs étudiés au 19<sup>e</sup> siècle. On expose dans ce paragraphe quelques éléments sur cette période post eulérienne.

#### 5.1- Approche du concept de fonction comme correspondance quelconque.

Le concept de fonction va être l'objet de discussions intenses de 1750 jusqu'à la moitié du 19° siècle. La recherche d'une définition adéquate et appropriée va être à l'origine d'autres théories mathématiques en analyse.

Tout d'abord, dans un traité sur le calcul différentiel et intégral (non publié), Condorcet (1743-1794) écrit « Je suppose que j'ai un certain nombre de quantités variables x, y z,..., F et que pour chaque valeur déterminée de x, y, z, ..., F ait une ou plusieurs valeurs déterminées qui y répondent : je dis que F est une fonction de x, y, z, ... ». Condorcet poursuit plus loin : « Enfin je sais que lorsque x, y, z seront déterminées, F le sera aussi, quand même

je ne connaîtrais ni la manière d'exprimer F en x, y, z ni la forme de l'équation entre F et x, y, z ; je saurai que F est fonction de x, y, z. » (voir [15] p. 57). Ainsi, Condorcet adopte la définition générale d'Euler et apporte plus de précision. Une fonction est vue comme une dépendance entre deux ou plusieurs quantités variables, que l'on sache exprimer explicitement cette dépendance par une relation ou non. A la suite de cette définition, Condorcet obtient une classification des fonctions en trois catégories : « Les fonctions dont la forme est donnée » ; « Les fonctions qui sont déterminées par une équation les liant » et enfin « Les fonctions définies par certaines propriétés ».

La généralisation de Condorcet et son idée de relation, vont se poursuivre et s'éclaircir. En particulier, l'idée des « fonctions définies par certaines propriétés », va amener à l'étude des classes de fonctions telles que les fonctions continues et les fonctions discontinues, ce qui va conduire à l'émergence du point de vue ensembliste de la théorie des fonctions. C'est ainsi que Dirichlet (1805-1859) donne en 1837 la définition suivante : « Désignons par a et b deux valeurs fixes et par x une grandeur variable, située entre a et b. Si à toute valeur x correspond une valeur finie y=f(x) qui varie de façon continue lorsque x varie lui-même de façon continue entre a et b, nous disons que y est une fonction continue pour cet intervalle. Ici il n'est pas du tout nécessaire que f s'exprime en fonction de x selon une même loi sur tout l'intervalle; il n'est même pas nécessaire d'envisager une expression algébrique explicite entre x et y » (voir [15] p. 60). Par conséquent, on peut dire qu'une fonction est devenue une relation de dépendance entre deux variables, qui peut être connue ou non, elle peut ne pas être exprimée comme combinaison algébrique. De plus, cette dépendance peut être exprimée à l'aide de plusieurs expressions dans un même intervalle.

Par ailleurs, notons aussi que D. Bernoulli a donné des solutions de l'équation des cordes vibrantes sous forme trigonométrique. Ainsi, une nouvelle question importante s'est posée : « Les fonctions arbitraires au sens d'Euler peuvent-elles être représentées par une série trigonométrique ? ». Cette question va permettre de faire évoluer considérablement le concept de fonction.

On peut constater que dès le début du 19<sup>e</sup> siècle, le concept de fonction va faire l'objet d'une étude rigoureuse de la part d'illustres mathématiciens tels que Gauss, Cauchy, Riemann, Bolzano, Fourier, Lagrange, Lacroix, Lobatchevsky et Abel. Rappelons à ce propos que, jusqu'au début du 19<sup>e</sup> siècle, l'existence de la dérivée de fonctions continues n'a jamais été l'objet d'étude et de doute. Il fallait attendre les travaux de Dirichlet et de Fourier pour que les notions de continuité et de dérivabilité soient clairement distinguées. En effet, lors de l'étude de la convergence des séries de Fourier d'une fonction, le théorème de Dirichlet met alors l'accent sur les points où la fonction n'est ni continue, ni dérivable.

Ainsi, Condorcet, Lacroix, Fourier, Lobatchevsky et Dirichlet, avaient repris la définition la plus générale de la notion de fonction d'Euler [à savoir : « En général, la fonction f(x) représente une suite de valeurs ou ordonnées dont chacune est arbitraire »] (voir le célèbre traité de Fourier « Théorie analytique de la chaleur » 1821), contribuant à mieux cerner les fondements du calcul différentiel, à travers l'étude de : convergence des séries, définition de la continuité, définition de la dérivée, .... Par ailleurs, la définition d'une fonction comme expression analytique, dont la forme la plus générale est une série entière, va être discutée par

Lagrange dans son célèbre traité « *Théorie des fonctions analytiques* ». Il va essayer de démontrer que toute fonction peut être représentée par une série entière, sauf peut-être en des valeurs isolées où on utilise des puissances négatives ou fractionnaires. D'autre part, la théorie d'intégration a été développée par Riemann (1854), afin de représenter par des séries de Fourier (dont les coefficients sont des intégrales), des fonctions ayant une infinité de points de discontinuité.

Les travaux de Condorcet, ont permis de s'acheminer vers la conception ensembliste de la notion de fonction. Elle est ainsi devenue une correspondance entre objets de deux ensembles. Cette définition ensembliste est restée presque inchangée depuis lors. C'est ainsi que selon Youschkevitch, Condorcet est le premier à avoir évalué l'importance de la définition générale d'une fonction et à l'avoir développée, du fait que son statut prendra le sens de « relation » entre quantités variables. Cependant, il est également important de souligner que depuis les travaux de Riemann, il est définitivement acquis que la notion de fonction est définie comme « une correspondance arbitraire entre les éléments de deux ensembles ». De plus, la classification des fonctions d'Euler par leur expression analytique, a été abandonnée au profit d'une classification par le biais de propriétés données, comme l'a proposé Condorcet, on parlera désormais d'ensemble de : fonctions continues ; fonctions différentiables ; fonctions intégrables ; fonctions discontinues ; fonctions dérivables ; ....

L'approfondissement de la notion de fonction et de continuité s'est accompagné par la construction de fonctions de plus en plus particulières.

#### 5.2- La définition ensembliste d'une fonction

Nous n'allons pas nous attarder sur cette représentation moderne du concept de fonction, qui est enseigné dans les différents cycles de formation supérieure des enseignants. Mais afin de mieux cerner les différentes étapes de l'évolution du concept de fonction et pour des raisons de compréhension et de clarté, on va présenter les grandes lignes de cette représentation ensembliste du concept.

La systématisation de la définition ensembliste de la notion de fonction, remonte aux travaux de Cantor et de Dedekind, à la fin du 19° siècle, sur la théorie des ensembles. Ces travaux vont amener à l'étude de la formulation mathématique d'une fonction. Ainsi, en 1891, dans « Sul concetto di numero » (voir [10]), Péano réduit la définition d'une fonction à celle d'une relation binaire particulière « Si on a une correspondance de la classe a à la classe b, à tout individu x de la classe a correspond un seul individu y de la classe b. Ceci ne constitue pas une définition, puisque l'idée de correspondance, ou représentation, ou opération, ou fonction [...] est primitive », cette notion de primitive a été étudié en amont. En 1911, dans « Sulla definizione di funzioni », Péano écrit avec plus de précision « Une fonction est une relation u telle que si deux couples (y;x) et (z;x) avec le même second élément, satisfont à la relation u, on a nécessairement, quelque soient x, y, z, que y=z ».

La définition abstraite de la notion de fonction comme correspondance entre deux ensembles, a eu ensuite un impact sur les mathématiciens et le développement des mathématiques, dans les années 1920 et 1930. En France, le groupe Bourbaki a considéré

cette définition abstraite dans plusieurs théories mathématiques. Dans d'autres pays, comme l'Allemagne, l'Italie ou la Hongrie, la définition précédente a été adoptée par des mathématiciens, pour développer des recherches nouvelles en mathématique.

#### 5.3. Apparition du concept de fonction dans l'enseignement.

A la fin du 19<sup>e</sup> siècle et au début du 20<sup>e</sup> siècle, le concept de fonction commence à faire son apparition dans l'enseignement secondaire. En effet, dans [3] M. B. Belhoste, analyse la réforme de 1902 en France, portant sur l'enseignement des sciences dans le secondaire. Ainsi, avec cette réforme de 1902, il y a eu une augmentation du volume horaire de l'enseignement des sciences. La commission de réforme, chargée par la Chambre des députés, est dominée par des universitaires, qui ont révisé les programmes de mathématiques et de physique. Et les nouveaux programmes introduisent la méthode expérimentale en physique et des éléments d'algèbre et d'analyse en mathématiques. En particulier, l'introduction de l'étude des fonctions y a été considérée.

La définition abstraite a fait son apparition dans les programmes du collège et du lycée dans les années 1960, avec les « *Mathématiques Modernes* » (1960-1970). Cette approche du concept de fonction avec une définition formelle faisant appel à une relation binaire, a été complètement rejetée. C'est ainsi, qu'on a pu voir émerger la didactique des mathématiques de façon systématique, et un retour à des définitions plus adéquates. Par ailleurs, par la même occasion on va assister à l'émergence des IREM en France, qui vont jouer un rôle important dans la mise en place de notions nouvelles dans les programmes et les manuels.

Aujourd'hui, l'analyse mathématique représente une partie importante des programmes de l'enseignement des mathématiques au lycée, dont le concept de fonction constitue l'objet fondamental. Ainsi, lors des dernières décennies, le concept de fonction a été largement traité dans la littérature didactique, en ce qui concerne les aspects de ses difficultés dans l'apprentissage. Il reste néanmoins que dans les pratiques didactiques on a tendance parfois à oublier ou à fermer les yeux sur les erreurs commises par les élèves, plus précisément celles qui empêchent la perception et l'acquisition du concept de fonction. Cette attitude a des conséquences sur le long terme, car les élèves restent avec des difficultés pour travailler sur l'analyse dans les programmes du lycée et même jusqu'à l'université. Or, d'une façon générale, il est bien admis qu'« il existe aussi un lien entre l'enseignement des mathématiques, l'histoire des mathématiques et la didactique... : la formation d'un concept nouveau en mathématiques a toujours exigé beaucoup de travail et d'efforts, et le professeur au courant de cette évolution historique pleine d'obstacles peut bâtir une stratégie en conséquence pour le faire acquérir par ses élèves, d'où une approche didactique (ou ce qu'on appelle transition didactique) appropriée fondée sur l'histoire du concept » (voir [1]). A ce propos, le célèbre mathématicien A. Weil a essayé de convaincre la communauté mathématique, que les étudiants peuvent tirer plus de profit en travaillant aussi sur le livre historique d'Euler [2]. La proposition de A. Weil témoigne de l'importance des écrits historiques dans l'apprentissage de l'analyse et la notion du concept de fonction. Les considérations précédentes, nous amènent à s'interroger sur le lien « histoire-enseignement » du concept de fonction : « Comment la connaissance de l'évolution historique du concept de

fonction permet de se rendre compte des obstacles rencontrés par les élèves, dans son acquisition? ». En d'autre terme, l'enseignant peut-il prendre en compte cette dépendance entre l'évolution historique du concept de fonction et son introduction dans l'enseignement, pour mieux adapter sa stratégie afin de l'enseigner?

Remarque 5.1. Une ébauche comparative Histoire-Enseignement concernant la notion de fonction peut apporter un autre éclairage sur l'enseignement de ce concept (voir [6], [9] et [14]). En effet, dans son travail sur la place de l'histoire des mathématiques dans la formation des enseignants du secondaire, D. Tournès s'est penché sur la question suivante « Peut-on enseigner les mathématiques en ignorant leur histoire ? » car « il est vrai que, en un certain sens et à la différence d'autres disciplines, les mathématiques se développent en niant leur histoire » (voir [14]). Il s'appuie en cela sur la constat suivant de Ch. Houzel « Le travail des mathématiciens est souvent consacré à reprendre des théories anciennes et à les refondre dans un cadre nouveau [...] ; les refontes successives que les mathématiques font subir aux théories gomment l'histoire.» (voir [8]).

**Remarque 5.2**. Pour l'édition scolaire actuelle, que ce soit en France, au Brésil ou ailleurs, même un inventaire sommaire montre que chaque manuel a sa propre présentation du concept de fonction qui lui est propre et s'inscrivant tout au plus dans l'esprit opté pour toute la série de niveaux.

*Remarque 5.3*. Une approche comparative portant sur le concept de fonction en physique et en mathématique, a été étudiée dans [13], à travers divers exemples.

#### 6. Conclusion

On peut dire que du 14° siècle à la fin du 19° siècle, on a assisté progressivement, à un passage du caractère intuitif géométrique au symbolisme analytique et algébrique. Comme l'a fait constater J. B. Grize sur la notion de fonction : « ... on peut en caractériser l'évolution sommairement en disant qu'on se trouve en présence d'un dégagement progressif des considérations physiques au profit de notions plus proprement logico-mathématiques.» (voir [7] p. 171-172). En effet, le dégagement des considérations physiques va permettre une introduction formelle du concept de fonction, basé sur la notion centrale de variable.

Par conséquent, le concept de fonction, avec l'algébrisation de l'analyse, va connaître des définitions générales de plus en plus variées. Exprimée d'abord par une formule algébrique dans la première moitié du 18° siècle, la définition de la notion de fonction est étendue à plusieurs expressions différentes dans la seconde moitié du 18° siècle. Ensuite, elle devient une relation entre quantités variables, dont la loi peut être connue ou inconnue. Enfin, la mise en œuvre de la théorie des ensembles donne à la notion de fonction le statut presque définitif de correspondance entre les objets de deux ensembles.

Remerciements. Les encouragements de Patrick Perrin ont été à l'origine de la réalisation de ce travail, dont il a assuré aussi la relecture, je le remercie vivement. Mes chaleureux remerciements vont également au Prof. Ahmed Jeddi, qui a relu le manuscrit et y a apporté des modifications intéressantes. Lors du Séminaire de l'Association Histoire des Mathématiques en Champagne Ardenne, les collègues de l'IREM m'ont fait part de remarques et suggestions, ce qui a permis d'améliorer le contenu du présent papier. Qu'ils trouvent ici l'expression de mes vifs remerciements.

#### Références

- [1] M. Akkar, « la philosophie de l'enseignement et la recherche en mathématiques », Actes du Congrès International sur : Mathématiques et Philosophie, Société Marocaine de Philosophie, 1984. Harmattan Okkad.
- [2] G. L. Alexanderson, *«About the cover: Euler's Introducio in Analysin Infinitorium»,»* Bulletin of the American Mathematical Society (New Series), Volume 44, Number 4 (2007), p. 635-639.
- [3] M. B. Belhoste, « L'enseignement secondaire français et les sciences au début du XXe siècle. La réforme de 1902 des plans d'études et des programmes », Revue d'histoire des sciences. 1990, Tome 43 n°4. pp. 371-400.
- [4] G. Debionne, « une histoire des éphémérides », Club d'Astronomie Quasar 95 (2008).
- [5] L. Euler, « *Introduction à l'analyse infinitésimale* ». Barrois aîné, Paris, ans IV-V (1796-1797). Traduction Française par J. B. Labey; 2 vols.
- [6] M. Fadel, F. Mahjoub, « Evolution du concept fonction : Histoire-Enseignement », Mémoire d'Inspection, 1988-1989.
- [7] J. B. Grize, « *Epistémologie et psychologie de la fonction* », Sous la direction de Jean Piaget, Edition PUF, 1968.
- [8] Ch. Houzel, « Histoire des mathématiques et enseignement des mathématiques », dans Histoire des mathématiques et épistémologie, Bulletin inter IREM N° 18, 1979.
- [9] Agnès Lenfant-Corblin & Mustapha Rachidi, « Exemple d'une expérience autour de l'introduction de la notion de fonction en classe de seconde », document pédagogique pour la formation PAF Académie de Reims (2009-2011).
- [10] G. Péano, « *Opere Scelte* », ed. Ugo Cassina, 3 Vols (Roma : Edizioni Cremonese 1957-59).
- [11] P. Perrin & J. C. Pénin, « Six leçons d'histoire des mathématiques », Résumés des conférences données en 1999. Association Histoire des Mathématiques en Champagne Ardenne.

- [12] Rashed Roshdi et al., « Histoire des sciences arabes : mathématiques et physique » Tome 2, Seuil, Paris 1997.
- [13] D. Rouvel, « Scolie au sujet d'une relation entre les mathématiques et la physique, » Le Bup no 879 (1), Union des Prof. de Physique et de Chimie Didactique Vol. 99 Décembre (2005), p. 1193-1204.
- [14] D. Tournès, « Place de l'histoire des mathématiques dans la formation des enseignants du secondaire », Publication de l'IUFM de la Réunion.
- [15] A.P. Youschkevitch, « Le concept de fonction jusqu'au milieu de XIXe siècle » dans « Fragment d'histoire des mathématiques », Brochure APMEP N° 41 (1981).
- [16] Brochure IREM, « Vous avez dit fonction? », IREM de Dijon, 1982.

#### Annexe 1: Les définitions historiques de la notion de fonction: Bref apercu

(D'après l'article de C. Marchini, L. Grugnetti et A. Maffini, « Le concept de fonction dans l'école italienne ; usage de l'épistémologie et de l'histoire des mathématiques pour clarifier le sens ». Actes de la Troisième Université d'Eté Européenne sur « Histoire et épistémologie dans l'éducation mathématique », volume 2, 421-444, Université Catholique de Louvain (2001).)

#### 1694 LEIBNIZ (1646 – 1716)

"J'appelle fonctions toutes les portions des lignes droites, qu'on fait en menant des droites indéfinies, qui répondent au point fixe, et aux points de la courbe".

#### 1718 BERNOULLI J. (1667 - 1748)

"On appelle fonction d'une grandeur variable une quantité composée de quelque manière que ce soit de cette grandeur variable et de constantes." Notation  $\varphi$  x.

#### 1748 EULER (1707 - 1783)

"Une quantité constante est une quantité déterminée, qui conserve toujours la même valeur...Une quantité variable est une quantité indéterminée, ou, si l'on veut, une quantité universelle qui comprend toutes les valeurs déterminées...Une fonction de quantité variable est une expression analytique composée, de quelque manière que ce soit, de cette même quantité et de nombres, ou de quantités constantes. Ainsi toute expression analytique, qui outre la variable z contiendra des quantités constantes, est une fonction de z. Par exemple, a+ 3z; az-4zz; az+b $\sqrt{aa}$ -zz; cz; etc., sont des fonctions de z. Une fonction de variable est donc aussi une quantité variable."

1755 EULER "Si certaines quantités dépendent d'autres quantités de telle manière que si les autres changent, ces quantités changent aussi, alors on a l'habitude de nommer ces quantités fonctions de ces dernières; cette dénomination a la plus grande étendue et contient en elle-même toutes les manières par lesquelles une quantité peut être déterminée par d'autre. Si, par conséquent, x désigne une quantité variable, alors toutes les autres quantités qui dépendent de x de n'importe quelle manière, ou qui sont déterminées par x, sont appelées fonctions de x."

#### 1782 CONDORCET (1743 - 1794)

"Je suppose que j'aie un certain nombre de quantités x,y,z, ...F, et que pour chaque valeur déterminée de x,y,z, ... etc., F ait une ou plusieurs valeurs déterminées qui y répondent : je dis que F est une fonction de x,y,z,....Enfin je sais que lorsque x,y,z seront déterminées, F le sera aussi, quand même je ne connaîtrais ni la manière d'exprimer F en x,y, z, ni la forme de l'équation entre F et x,y,z ; je saurai que F est fonction de x,y,z."

#### 1791 LAGRANGE (1736 - 1813)

1. "On appelle fonction d'une ou plusieurs quantités, toute expression de calcul dans laquelle ces quantités entrent d'une manière quelconque, mêlées ou non avec d'autres quantités qu'on regarde comme ayant des valeurs données et invariables, tandis que les quantités de la fonction peuvent recevoir toutes les valeurs possibles. Ainsi dans les fonctions on ne considère que les quantités qu'on suppose variables, sans aucun égard aux constantes qui peuvent y être mêlées. 2. Pour marquer une fonction d'une seule variable comme x, nous ferons simplement précéder cette variable de la lettre ou caractéristique f, ou F; mais lorsqu'on voudra désigner la fonction d'une quantité déjà composée de cette variable, comme  $x^2$  on a + bx ou etc., on renfermera cette quantité entre deux parenthèses. Ainsi fx, désignera une fonction de x,  $f(x^2)$   $f\{a + bx\}$ , etc. désigneront des fonctions de  $x^2$ , de a + bx, etc. Pour marquer une fonction de deux variables indépendantes comme x, y, nous écrirons  $f\{x, y\}$ , et ainsi des autres."

#### 1797 LACROIX (1765 - 1843)

"Toute quantité dont la valeur dépend d'une ou de plusieurs autres quantités, est dite fonction de ces dernières, soit qu'on sache ou qu'on ignore par quelles opérations il faut passer pour remonter de celles-ci à la première."

#### 1821 FOURIER (1768 -1830)

"En général, la fonction f(x) représente une suite de valeurs ou ordonnées dont chacune est arbitraire."

#### 1821 CAUCHY(1789-1857)

"Lorsque des quantités variables sont tellement liées entre elles que, la valeur de l'une d'elles étant donnée, on puisse en conclure les valeurs de toutes les autres, on conçoit d'ordinaire ces diverses quantités exprimées au moyen de l'une d'entre elles, qui prend alors le nom de variable indépendante et les autres quantités exprimées au moyen de la variable indépendante sont ce qu'on appelle des fonctions de cette variable."

#### 1834 LOBATCHEVSKY (1792 - 1856)

"La conception générale exige qu'une fonction de x soit appelée un nombre qui est donné pour chaque x et qui change graduellement en même temps que x. La valeur de la fonction peut être donnée soit par une expression analytique, soit par une condition qui donne un moyen pour tester tous les nombres et sélectionner l'un d'eux ; ou finalement, la dépendance peut exister mais reste inconnue."

#### 1851 RIEMANN (1826 - 1866)

"Soit z une quantité variable, qui prend peu à peu, toutes les valeurs réelles possibles, alors on appelle w une fonction de z, si à chacune de ces valeurs correspond une valeur unique de la quantité indéfinie w, et si z parcourt continûment toutes les valeurs qui se trouvent entre deux valeurs constantes, w change aussi continûment, alors on appelle cette fonction continue."

#### 1870 HANKEL (1839 - 1873)

"On dit que y est fonction de x si à chaque valeur de x d'un certain intervalle correspond une valeur bien définie de y sans que cela exige pour autant que y soit définie sur tout l'intervalle par la même loi en fonction de x, ni même que y soit définie par une expression mathématique explicite de x."

#### 1902 LEBESGUE (1875 - 1941)

"Bien que, depuis Dirichlet et Riemann, on s'accorde généralement à dire qu'il y a fonction quand il y a correspondance entre un nombre y et des nombres  $x_1,x_2$ , sans se préoccuper du procédé qui sert à établir cette correspondance, beaucoup de mathématiciens semblent ne considérer comme de vraies fonctions que celles qui sont introduites par des correspondances analytiques. On peut penser qu'on introduit peut-être ainsi une restriction assez arbitraire ; cependant il est certain que cela ne restreint pas pratiquement le champ des applications, parce que seules, les fonctions représentables analytiquement, sont effectivement employées jusqu'à présent."

#### 1939 BOURBAKI

"Soient E et F, deux ensembles distincts ou non., une relation entre une variable x de E et une variable y de F est dite relation fonctionnelle en y ou relation fonctionnelle de E vers F, si pour tout x appartenant à E, il existe un seul y appartenant à F, qui soit dans la relation considérée avec x.

On donne le nom de fonction à l'opération qui associe ainsi à tout élément x de E, l'élément y dans F qui se trouve dans la relation donnée avec x; on dit que y est la valeur de la fonction pour l'élément x, et que la fonction est déterminée par la relation fonctionnelle considérée."

#### 1927 WEYL (1885 -1955)

"Personne n'a jamais su expliquer ce qu'est une fonction. Mais une fonction f est définie si par un moyen quelconque on peut associer à un nombre a, un nombre b... On dit alors que b est la valeur de la fonction f pour la valeur a de l'argument".

A cette liste de 17 définitions, on peut ajouter d'autres définitions telles que celles de :

D'ALEMBERT (Encyclopédie 1785)

DIRICHLET (Sur la représentation de fonctions quelconques par des séries de sinus et cosinus - 1837)

DEDEKIND (Was sind und was sollen die zahlen - 1888)

PEANO (Sul concerto di numero -1891)

PEANO (Sulla definizione di funzione - 1911)

S. Mac Lane a écrit sur le concept de fonction (1986).

#### Annexe 2: Extrait de L'Introduction à L'Analyse Infinitésimale

#### Par Léonard Euler

Traduite du latin en français par J. B. Labey, Paris, 1796

# INTRODUCTION

A

# L'ANALYSE INFINITÉSIMALE.

# LIVRE PREMIER,

CONTENANT l'Explication des diverses fortes de Fonctions, leur résolution en Facteurs & leur développement en Séries infinies; avec la théorie des Logarithmes, celle des Arcs de cercle, de leurs Sinus & de leurs Tangentes, & plusieurs autres Questions propres à faciliter l'étude de l'Analyse infinitésimale.

### CHAPITRE PREMIER.

## Des Fonctions en général.

1. Une quantité constante est une quantité déterminée, qui conserve toujours la même valeur.

Tels sont les nombres de toute espece, qui conservent constamment la valeur qu'ils ont une sois obtenue. Lorsqu'il s'agit de représenter ces sortes de quantités par des caractères, on se sert des premieres lettres de l'Alphabet a, b, c, &c. A la vérité, dans l'Analyse ordinaire qui n'a pour objet que des quantités déterminées, on désigne ordinairement celles qui sont connues par les premieres lettres de l'Alphabet, & celles qui ne le sont pas, par les dernieres; mais c'est une distinction à laquelle on a moins égard dans la haute Géomètrie; on y envisage les quantités sous un autre aspect

EULER, Introduction à l'Anal. infin. Tome I. A

Source: e-rara.ch / ETH-Bibliothek Zürich / Signatur: Rar 5189

#### DES FONCTIONS

particulier, les unes étant confidérées comme constantes, & les autres comme variables.

2. Une quantité variable est une quantité indéterminée, ou, si l'on veut, une quantité universelle, qui comprend toutes les valeurs déterminées.

Une valeur déterminée quelconque pouvant être exprimée en nombre, il s'ensuit qu'une quantité variable comprend tous les nombres de quelque nature qu'ils soient. Il en est de la quantité variable, comme du genre & de l'espece à l'égard des individus; on peut la concevoir comme embrassant toutes les quantités déterminées. Au reste, on a coutume de représenter les quantités variables par les dernieres lettres de l'Alphabet z, y, x, &c.

3. Une quantité variable devient déterminée, lorsqu'on lui

attribue une valeur déterminée quelconque.

Elle peut donc le devenir d'une infinité de manieres, puisqu'on peut lui substituer tous les nombres imaginables. La fignification d'une quantité variable ne peut être censée épuisée, qu'autant qu'on aura conçu en sa place toutes les valeurs déterminées. Ainsi une telle quantité comprend tous les nombres tant positifs que négatifs, les nombres entiers & fractionnaires, ceux qui font rationnels, irrationnels & transcendants; on ne doit pas même en exclure zéro, ni les nombres imaginaires.

4. Une fonction de quantité variable est une expression analytique composée, de quelque maniere que ce soit, de cette même

quantité & de nombres, ou de quantités constantes.

Ainsi toute expression analytique, qui outre la variable 7 contiendra des quantités constantes, est une fonction de 7. Par exemple, a + 37; a7 - 477; a7 + b V aa - 77; 5. Une sonction de variable est donc aussi une quantité

variable.

En effet, comme on peut mettre à la placede la variable toutes les valeurs déterminées, la fonction recevra elle-même

Source: e-rara.ch / ETH-Bibliothek Zürich / Signatur: Rar 5189

Persistenter Link: http://dx.doi.org/10.3931/e-rara-8612

#### EN GÉNÉRAL.

une infinité de valeurs, & il est impossible d'en concevoir aucune, dont elle ne soit susceptible, puisque la variable comprend même les valeurs imaginaires. Par exemple, quoique cette fonction V(9-zz) ne puisse donner un nombre plus grand que 3, tant qu'on mettra des nombres réels à la place de z; cependant, en introduisant pour z des nombres imaginaires, tels que z = 1, il n'est pas possible d'assigner une valeur déterminée, qui ne puisse être déduite de la formule V(9-zz). Au reste, il n'est pas rare de rencontrer des expressions qui ne sont que des fonctions apparentes; car, quelque valeur qu'on donne à la variable, elles conservent toujours la même valeur, comme  $z^0$ ; z = 1; z = 1; z = 1; z = 1. Ces expressions, sous la forme apparente de fonctions de variables, sont réellement des quantités constantes.

6. La principale différence des fonctions consiste dans la combinaison de la variable & des quantités constantes, qui les

forment.

Elle dépend donc des opérations par lesquelles les quantités peuvent être composées & combinées entr'elles. Ces opérations sont l'Addition & la Soustraction; la Multiplication & la Division; l'Élévation aux Puissances & l'Extraction des Racines; à quoi il faut ajouter encore la Résolution des Équations. Ou re ces opérations, qu'on appelle algébriques, il y en a plusieurs autres qu'on nomme transcendantes : comme les exponentielles, les logarithmiques, & d'autres fans nombre, que le Calcul Intégral fait connoître.

Distinguons cependant certaines especes de fonctions; savoir, les Multiples 27; 37; 37; 47, &c. & les Puissances de 7; comme 7; 7; 7; 7; 7; 8c, quantités formées par une seule opération, & qui, comme celles qui résultent de la combinaison de plusieurs, ne laissent pas de porter de même

le nom de fonctions.

7. Les fonctions se divisent en algébriques & en transcendantes; les premieres sont formées par des opérations algébriques A ij

Source: e-rara.ch / ETH-Bibliothek Zürich / Signatur: Rar 5189

#### DES FONCTIONS

seulement, & les dernieres supposent pour leur formation des opérations transcendantes.

Les multiples & les puissances de  $\chi$  sont donc des sonctions algébriques, ainsi que toutes les expressions, qui n'admettent que les opérations algébriques, dont nous avons parlé; telle est la quantité  $\frac{a+b\chi^*-c\sqrt{(2\chi-\chi)}}{aa\chi-3b\chi^3}$ . Souvent les sonctions algébriques ne peuvent être représentées explicitement; telle seroit la fonction  $Z de \chi$ , si elle étoit exprimée par l'équation  $Z^s = a\chi\chi Z^3 - b\chi^+ Z^2 + c\chi^3 Z - 1$ . Car, quoique cette équation ne puisse être résolue, il n'en est pas moins certain que Z est égal à une expression composée de la variable  $\chi$  & de constantes, & que par conséquent Z est une sonction quelconque de  $\chi$ . Pour avoir une sonction transcendante, il ne suffit pas qu'il entre dans son expression une opération transcendante, il faut de plus qu'elle affecte la variable; car si elle n'affectoir que des constantes, la fonction n'en seroit pas moins censée algébrique. Par exemple, si c désigne la circonférence d'un cercle, dont le rayon c 1, la quantité c sera bien une quantité transcendante; cependant ces expressions  $c+\chi$ ;  $c\chi^2$ ;  $4\chi^c$ , &cas feront des sonctions algébriques de  $\chi$ . Car il importe peu de savoir si ces sortes d'expressions  $\chi^c$  doivent être mises au nombre des fonctions algébriques ou non. Il  $\gamma$  a aussi des Géomètres qui ont mieux aimé donner aux puissances de  $\chi$ , dont les exposans étoient des nombres irrationnels, comme  $\chi^{\nu^2}$ , le nom de fonctions interscendantes, que celui de fonctions algébriques.

8. Les fonctions algébriques se subdivisent en rationnelles & en irrationnelles. Dan les dernieres la variable est affectée de radicaux, & dans les premieres elle n'en est point affectée.

Par conséquent, les fonctions rationnelles n'admettent pas d'autres opérations que l'Addition, la Soustraction, la Multiplication, la Division & l'Élévation aux Puissances, dont les exposans sont des nombres entiers; ainsi, les quan-

Source: e-rara.ch / ETH-Bibliothek Zürich / Signatur: Rar 5189

#### EN GÉNÉRAL.

thes  $a + \zeta$ ;  $a - \zeta$ ;  $a \zeta$ ;  $\frac{aa + \zeta\zeta}{a + \zeta}$ ,  $a \zeta^3 - b \zeta^5$ , &c. font des fonctions rationnelles de  $\zeta$ ; mais ces expressions  $V \zeta$ ;  $a + V (aa + \zeta\zeta)$ ;  $V (a - 2\zeta + \zeta\zeta)$ ;  $\frac{aa - \zeta V (aa + \zeta\zeta)}{a + \zeta}$  en seront des fonctions irrationnelles.

Celles-ci se divisent commodément en explicites & en implicites. Les explicites sont développées au moyen des radicaux; nous en avons donné des exemples, & les implicites dépendent de la résolution des équations. Ainsi Z sera une fonction irrationnelle implicite de z, si elle est représentée par cette équation  $Z^2 = a z Z^2 - b z^5$ . En esset, on ne peut en tirer la valeur explicite de Z, même en admettant les signes radicaux, par la raison que l'Algébre n'est pas encore parvenue à ce degré de persection.

9. Les fonctions rationnelles enfin, se divisent en entieres & en fractionnaires.

Dans celles là, il n'entre aucune puissance négative de la variable z, ni aucunes fractions qui renferment cette variable dans leurs dénominateurs; d'où il suit que les fonctions fractionnaires sont celles qui ont des dénominateurs affectés de la variable z, ou dans lesquelles se rencontrent des exposans négatifs de cette même variable. Ainsi la formule générale des fonctions entieres sera  $a + bz + cz^2 + dz^3 + ez^4 + fz^5 + &c$ . Car on ne peut imaginer aucune sonction entiere de z, qui ne soit renfermée dans cette expression. Quant aux sonctions fractionnaires, comme plusieurs fractions peuvent toujours être réduites à une seule, elles seront comprises dans la formule

$$a + bz + cz^2 + dz^3 + ez^4 + fz^5 + &c.$$
  
 $a + 6z + yz^4 + bz^5 + ez^4 + \zeta z^5 + &c.$ 

Remarquez ici que les quantités constantes a, b, c, d, &c. $\alpha, \varepsilon, \gamma, \delta$ , &c. soit qu'on les suppose positives ou négatives, entieres ou fractionnaires, rationnelles ou irrationnelles, &

Source: e-rara.ch / ETH-Bibliothek Zürich / Signatur: Rar 5189