LE DEUXIEME PROBLÈME DE DEBEAUNE

Patrick Perrin
IREM de Reims

Dans une lettre adressée à Florimond Debeaune datée du 20 février 1639, René Descartes donne la solution d'un problème resté célèbre pour deux raisons. Primo c'est le premier problème relevant de ce que les anciens géomètres appelaient la méthode inverse des tangentes : trouver une courbe dont les tangentes satisfont une condition donnée. Secundo sa solution met en jeu pour la première fois une courbe logarithmique, même si le terme n'est pas employé par Descartes. Nous avons souhaité dans cet article accompagner l'intégralité du texte de Descartes d'un éclairage historique et mathématique afin que le lecteur puisse apprécier pleinement la démarche originale et novatrice mise en place pour la résolution de ce problème.

Le décor et les acteurs

En cette première moitié du 17e siècle l'organisation du monde scientifique laisse encore à désirer. Les sociétés savantes ne sont pas encore nées[1] et les auteurs ne peuvent faire connaître leurs travaux qu'à travers des échanges épistolaires ou en faisant imprimer des livres fort coûteux lorsqu'ils trouvent un riche mécène. Heureusement, certains amateurs de sciences, tel Mersenne à Paris qui était en relation avec de nombreux savants[2], permettaient une communication partielle des nouveaux travaux de chacun. Une des principales préoccupations des mathématiciens de cette époque est l'étude des propriétés des courbes. En 1639, Fermat, Descartes et Roberval ont déjà mis au point leur propre méthode de calcul des tangentes, chacune reposant sur des principes différents.[3]

Le plus célèbre des philosophes français est né en 1596 à La Haye en Touraine dans une famille de petite noblesse. Après des études de droit et de médecine achevées en 1616, René Descartes partage les neuf années suivantes entre des voyages, des engagements dans diverses armées et des temps d'étude. En 1628 il s'installe en Hollande et y rédige son œuvre tout en correspondant avec les savants européens. Il quitte la Hollande en 1649 pour la cour de la reine Christine de Suède et meurt à Stockholm en 1650. C'est en 1637 que Descartes publie à Leyde son *Discours de la Méthode*, accompagné de trois traités scientifiques : *la Dioptrique*,

[1] La Société royale de Londres fut fondée le 28 novembre 1660 au Gresham College ; l'Académie des sciences de Paris fut créée par Colbert en 1666 ; celle de Berlin en 1700 par Frédéric I.

[2] Le réseau des savants correspondants de Mersenne comportait entre autres : Cavalieri, Cavendish, Debeaune, Desargues, Descartes, Fermat, Frenicle, Galilée, Huygens, Mydorge, Etienne Pascal, Pell, Roberval, Grégoire de Saint Vincent, Torricelli. Mersenne organisait également des réunions savantes à Paris au couvent des minimes près de la place royale.

[3] Fermat a fait connaître sa méthode pour la *recherche du maximum et du minimum* en 1638 mais la possédait depuis 1629 ; Roberval a élaboré sa méthode cinématique reposant sur la composition des mouvements entre 1634 et 1637 ; Descartes a proposé la sienne dans *la Géométrie* (cf. infra).

les Météores et *la Géométrie*. La *Géométrie* est le seul livre de Descartes sur les mathématiques. Son but est de montrer que l'on peut ramener la résolution des problèmes de géométrie à celle de quelques équations algébriques, ou selon les termes de l'auteur :

> *Ainsi, voulant résoudre quelque problème, on doit d'abord le considérer comme déjà fait, et donner des noms à toutes les lignes qui semblent nécessaires pour le construire, aussi bien à celles qui sont inconnues qu'aux autres. Puis, sans considérer aucune différence entre ces lignes connues et inconnues, on doit parcourir la difficulté selon l'ordre qui montre le plus naturellement de tous en quelle sorte elles dépendent mutuellement les unes des autres, jusques à ce qu'on ait trouvé moyen d'exprimer une même quantité en deux façons, ce qui se nomme une équation …* [4]

Il est important de souligner que Descartes ne retient dans la *Géométrie* que les courbes susceptibles d'avoir une équation polynomiale, les autres, comme la quadratrice ou la spirale, qualifiées de courbes mécaniques, en sont exclues. Descartes expose sa méthode des tangentes dans le livre II de la *Géométrie*. En fait il cherche à déterminer la normale à une courbe, ou plus précisément la sous normale c'est-à-dire la distance entre le point origine et le point d'intersection de la normale avec le premier axe[5]. Pour ce faire il envisage un cercle passant par un point fixe C de la courbe donnée et dont le centre P appartient à ce premier axe ; ce cercle sera tangent à la courbe au point C si et seulement si la droite CP est la normale à la courbe (cf. figure 1). Descartes commence par rechercher les équations que doivent vérifier les coordonnées des points d'intersection de la courbe et du cercle, puis va donner une condition pour qu'une de ces équations polynomiales aient une racine double e : à savoir que le polynôme soit divisible par $(y-e)^2$ si la variable est y. Ce qui lui permettra de déterminer e par identification des coefficients du polynôme. Par la suite[6] après avoir pris connaissance de la méthode des tangentes de Fermat dont il trouvait le fondement obscur, Descartes proposa une autre méthode algébrique de calcul des tangentes qui était censée justifier les calculs de Fermat. Dans celle-ci il envisageait non plus un cercle passant par un point B donné de la courbe, mais une droite. Cette droite recoupait la courbe en un second point D, qui coïncidait avec le point B lorsque la droite était tangente en B à la courbe (cf. figure 2).

La contribution de Descartes aux mathématiques ne se résume pas à son traité *La Géométrie* ; sa correspondance en fournit de nombreux autres exemples. Cette correspondance a fait l'objet d'une première édition en trois volumes par Claude Clerselier entre 1657 et 1667 à partir des minutes manuscrites de Descartes. Parmi les éditions suivantes notons celle de Victor Cousin (Œuvres complètes de Descartes, Paris, Levrault, 1824-1826) et celle de Charles Adam et Paul Tannery (Œuvres complètes de Descartes, Paris, Lecerf, 1897-1913) qui est accompagnée de nombreuses notes fort utiles. La lecture de la correspondance scientifique de Descartes et de ses contemporains est un précieux témoignage sur la construction du savoir mathématique dont on peut suivre ainsi les différentes étapes.

---

4 Descartes, René. *La Géométrie*. Paris Hermann 1886, p3.

5 Dans la figure 1, la sous normale est AP'.

6 Dans une lettre écrite en juin 1638 à son ami Claude Hardy (cf. Descartes, René. *Œuvres,* pub. par C. Adam et P. Tannery, Correspondance. Tome II. Vrin 1988, p170-173).

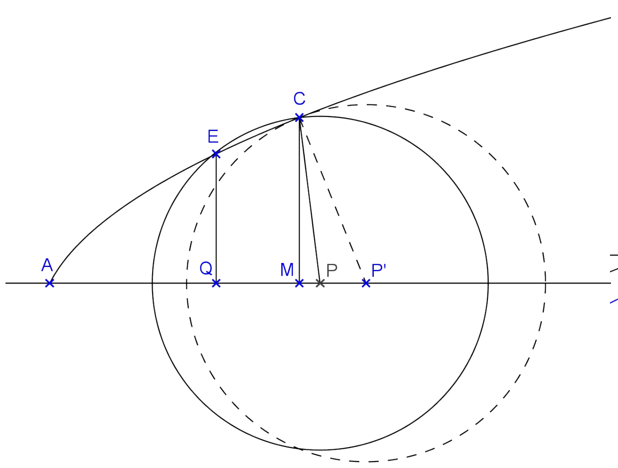


Figure 1

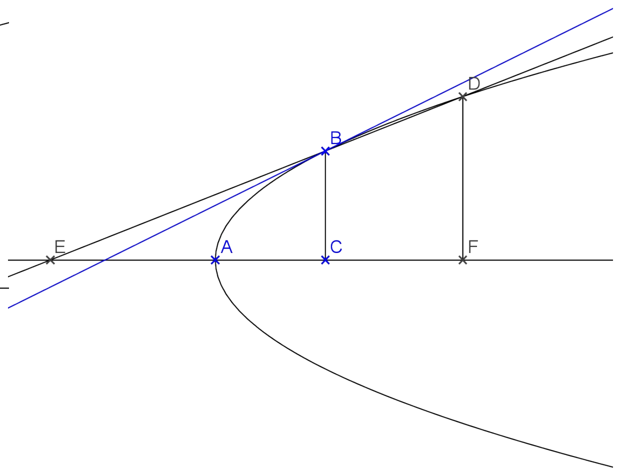


Figure 2

Florimond Debeaune nait à Blois en 1601. Il fait des études de droit à Paris et devient magistrat dans sa ville natale. Son second mariage lui apporte une coquette somme d'argent qui lui permet de se constituer une grande bibliothèque et de se construire un observatoire astronomique. Il s'est d'ailleurs intéressé à la fabrication de lentilles pour des instruments optiques. Mathématicien amateur, il correspond avec Mydorge, Mersenne et Descartes. A la suite de la parution de la *Géométrie* qui n'a pas reçu en France un accueil unanime, Debeaune prend avec zèle le parti de la nouvelle géométrie et entreprend d'en éclaircir certains points. Ses commentaires furent publiés dans la première édition latine de la *Géométrie* sous le titre *Florimundi de Beaune, in Cartesii Geometriam notae breves* [7]. Debeaune meurt à Blois en 1652.

La lettre de Descartes à Debeaune datée du 20 février 1639

Dans cette lettre assez longue Descartes va répondre à plusieurs questions soulevées par son correspondant. Elle commence par des remerciements pour les Notes que Debeaune a écrites sur la *Géométrie* qui témoignent de l'estime et de l'amitié que Descartes lui portait :

> *Monsieur,*[8]
>
> *I'ay esté extremement aise de voir vos Notes sur ma Geometrie ; & ie puis dire, auec verité, que ie n'y ay pas trouué vn seul mot qui ne soit entierement selon mon sens. En sorte que i'ay admiré que vous ayez pû reconnoistre des choses que ie n'y ay mises qu'obscurement, comme en ce qui regarde la generalité de la methode, & la construction des lieux plans & solides, &c. Et par tout ie prens garde que vous auez*

---

[7] Ces notes brèves occupent tout de même trente six pages de l'édition latine de François Shooten lorsque la *Géométrie* en occupe cent six.

[8] Dans les extraits de la correspondance de Descartes que nous donnons dans cet article, nous avons respecté l'orthographe de l'époque. Il faut souligner deux différences avec l'orthographe actuelle qui pourraient dérouter le lecteur moderne. La lettre j est remplacée par la lettre i en initiale d'un mot (Descartes écrit ie pour je). L'usage des lettres u et v est très différent du notre : ces lettres ne servent pas à distinguer une valeur phonétique (u voyelle et v consonne) mais l'une v est utilisée en initiale et l'autre u à l'intérieur des mots (Descartes écrit « auec verité » pour avec vérité et « trouué vn » pour trouvé un).

plustost eu dessein d'excuser mes fautes, que de les découurir ; de quoy i'ay veritablement sujet de vous remercier, à cause que c'est vn grand témoignage de vostre bienueillance ; mais ie ne vous aurois pas moins remercié, si vous les auiez remarquées, à cause de l'vtilité que i'en aurois pû retirer. Et afin que vous sçachiez que ie ne me flatte pas tant que ie n'y reconnoisse beaucoup de manquemens, ie vous en diray icy quelques-uns.[9]

Descartes revient dans la suite de la lettre sur le traitement de quelques questions de lieux géométriques figurant dans la *Géométrie* (généralité de la méthode, omissions de quelques cas, remarques sur la nature du lieu suivant le degré des équations). Puis il remercie Debeaune pour le travail sur la réfraction qu'il lui a envoyé. Ce passage nous révèle un Descartes aigri par les querelles avec les autres géomètres et guère tendre avec ses contemporains :

Ie vous remercie de la proportion des Refractions que vous m'auez enuoyée ; ie ne doute point qu'elle ne soit tres exacte, & ie fais si peu d'estat de celuy qui dit auoir fait des experiences qui monstrent le contraire, que i'ay seulement honte de nostre siecle, de ce que de telles gens en trouuent d'autres qui daignent les écoûter ; mais ie ne croy pas qu'il y ait personne, que les raisons dont vous le refutez ne persuadent.[10]

Après avoir donné sa réponse sur les machines à tailler les verres de lunettes et la forme des verres, Descartes en vient aux problèmes sur les courbes proposés par Debeaune. Les premiers propos de Descartes laissent à penser qu'ils traitent du problème inverse des tangentes et que nos deux correspondants auraient vu le lien avec le problème des quadratures[11] :

Pour vos lignes courbes, la propriété dont vous m'enuoyez la demonstration me paroist si belle, que ie la prefere à la quadrature de la parabole trouuée par Archimede. Car il examinoit vne ligne donnée, au lieu que vous determinez l'espace contenu dans vne qui n'est pas encore donnée. Ie ne croy pas qu'il soit possible de trouuer generalement la conuerse[12] *de ma regle pour les tangentes, ny de celle dont se sert Monsieur de Fermat non plus, bien que la pratique en soit en plusieurs cas plus aisée que la mienne. Mais on en peut déduire a posteriori des Theoremes, qui s'estendent à toutes les lignes courbes qui s'expriment par vne équation, en laquelle l'vne des quantitez x ou y n'ait point plus de deux dimensions, encore que l'autre en eust mille ; & ie les ay trouuez presque tous en cherchant cy-devant vostre deuxième ligne courbe ; mais pour ce que ie ne les écriuois que dans des brouillons que ie n'ay pas gardez, ie ne vous les puis enuoyer.*[13]

9 Descartes, René. *Œuvres,* pub. par C. Adam et P. Tannery, Correspondance. Tome II. Paris Vrin 1988, p510.
10 ibid. p512.
11 Cf. annexe en fin d'article & bibliographie [16].
12 Converse : réciproque
13 ibid. p513-514.

Les quatre lignes de Debeaune

Debeaune a proposé sous forme de problèmes de trouver quatre lignes courbes, celle qui est restée dans l'histoire est la deuxième. Descartes ne reprend pas l'énoncé de ces problèmes dans cette lettre et pour avoir une idée de ceux-ci, il faut chercher des éléments de réponses dans d'autres documents.

La première ligne courbe est mentionnée dans plusieurs lettres. Dans une lettre de Descartes à Mersenne du 15 novembre 1638, on apprend que Descartes a déjà donné sa réponse à certaines des questions de Debeaune dans une missive précédente à Mersenne, que la solution du premier problème est une hyperbole reconnaissable par son équation et que celui-ci est beaucoup plus aisé à résoudre que le deuxième, comme en témoignent ces deux extraits :

> *Ie suis bien aise que M. de Beaune se soit satisfait touchant ses lignes. Il pourra voir si ma réponse s'accorde auec ce qu'il en a troué ; mais ie m'étonne de ce qu' aprés auoir remarqué que la definition que ie donne des lignes du premier genre, conuient à la premiere des siennes, il n'a pas pour cela reconnu qu'elle est une hyperbole ; car il est tres certain qu'elle en est vne, & ie luy en enuoyerois la construction, sinon que ie veux croire qu'il l'a desja trouuée, depuis ma réponse.*[14]
>
> […] *Comme luy & le geostaticien*[15] *me semblent plaisans, en ce qu'ils se vantent d'avoir troué les deux lignes de M. de Beaune, & toutesfois ils n'ont pas seulement sceu connoistre que la premiere, qui est incomparablement plus aisée que l'autre, est vne hyperbole.*[16]

Dans le premier passage Descartes répond indirectement à des questions soulevées par Debeaune dans une lettre adressée à Mersenne le 25 septembre 1638. Debeaune dit avoir rencontré des difficultés en essayant d'appliquer à ses deux lignes courbes la méthode des tangentes[17] exposée dans la *Géométrie,* difficultés qu'il a finalement surmontées pour trouver l'équation de sa première ligne qui selon lui n'est pas une hyperbole quoiqu' étant du premier genre[18].

> *Et ie croy qu'il n'a point pensé aux cas des exemples que ie lui ay proposés, et ce qui m'en faict doubter est que, dans la page 335, il dict qu'il n'y a que le cercle, la parabole, l'hyperbole et l'ellipse qui soient du premier genre des lignes courbes, et toutesfois la premiere de mes lignes courbes n'est pas une de celles la, et neantmoins est du premier genre suiuant sa définition de la page 319. C'est pour quoy il n'a pas adiousté* (ajouté) *ce qui est necessaire, oultre ce qu'il a dict, pour trouuer les*

[14] Descartes, René. *Œuvres,* pub. par C. Adam et P.Tannery, Correspondance. Tome II. Paris Vrin 1988, p424.

[15] Luy c'est Roberval l'ennemi intime de Descartes, le geostaticien c'est Jean de Beaugrand.

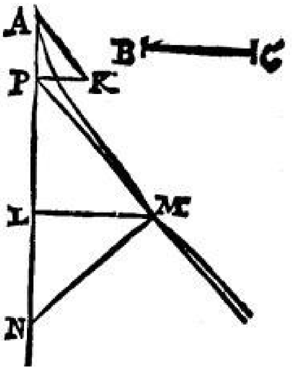
[16] ibid. p435.

[17] La méthode de Descartes nécessite de savoir écrire l'expression générale d'un polynôme ayant une racine double e. Dans la *Géométrie* Descartes donne trois exemples, mais il n'y a qu'un seul cas où le polynôme est de degré supérieur à deux (degré 6). Dans son calcul de la tangente à sa première ligne Debeaune trouve un polynôme de degré quatre ce qui semble l'avoir bloqué un certain temps. (Cf. bibliographie [4] p515-516 & [2] p130-134.)

[18] Descartes appelle courbes du premier genre celles dont l'équation est un polynôme du second degré en (x, y).

contingentes de ces sortes de lignes, et c'est aussi ce qui m'a donné de la peyne a les trouuer [...][19]

D'après l'auteur anonyme d'un manuscrit intitulé *Instruction du calcul différentiel et des méthodes générales de trouver les tangentes des lignes courbes* datant du début du 18e siècle la première ligne de Debeaune est celle qui est prise comme exemple dans les *notes brèves* pour détailler la méthode de calcul des tangentes de Descartes[20] :



Source gallica.bnf.fr/BnF

Esto linea recta AN, curva autem AM, cujus vertex punctum A, cujusque haec sit proprietas : ut, assumpto in ea quolibet puncto, ut M, à quo ad rectam AN ducatur perpendicularis ML, recta BC, ad arbitrium sumpta, unà cum AL, sit ad AL, sicut linea AL ad LM. Oportet rectam lineam invenire PM, tangentem hanc curvam AM in puncto M. Supponatur linea NM perpendicularis ad tangentem PM in puncto M, & BC = b, AL = y, & LM = x. Hinc cum b + y sit ad y, ut y ad x, siet aequatio talis : bx + yx = yy, ac proinde $x=\frac{y^2}{b+y}$ [21]

Ceci confirmerait que le premier problème ne relevait que du calcul direct des tangentes et ne présentait pas de grandes difficultés.

En ce qui concerne le deuxième problème on dispose de deux énoncés équivalents et très voisins, le premier dans l'annexe d'une lettre de Debeaune à Roberval datée du 10 octobre 1638 :

Pour Monsieur Roberval avec la lettre.

Soit la courbe AXE de laquelle le sommet soit A, l'axe AYZ, [cf. figure 3] *et que la propriété de ceste courbe soit telle, qu'ayant pris en icelle tel poinct qu'on vouldra, comme X, duquel soit menée la ligne droicte XY perpendiculairement ordonnée a l'axe, et par le mesme poinct X ayant mené la touchante GXN, sur laquelle, au poinct X, eleuant la perpendiculaire XZ iusques a l'axe, il y ait mesme raison de ZY à YX que d'vne ligne donnée, comme AB, a la ligne YX moins AY.*[22]

---

19 Debeaune Florimond, Lettre à Mersenne, in *Œuvres de Descartes,* Tome V, pub. par C. Adam et P. Tannery. L.Cerf 1903, p515.

20 Cette affirmation semble crédible puisque Debeaune dit avoir essayé la méthode des tangentes de Descartes, nouvelle pour lui, sur sa première ligne. (cf. note 17)

21 Debeaune Florimond, *Notae Breves*. in Renati Descartes *Geometria.* Friderici Knochii 1695, p131.

« Soit une ligne droite AN, et une courbe AM dont le sommet est le point A, et qui a cette propriété : un point étant choisi sur elle où l'on voudra, comme M, par lequel est menée la perpendiculaire ML à la droite AN, la longueur BC, prise arbitrairement, ensemble avec AL est à AL, comme AL est à LM. Il faut trouver la ligne droite PM, tangente à cette courbe AM au point M. Que la ligne NM soit supposée perpendiculaire à la tangente PM au point M, et que BC = b, AL = y, et LM = x. De là comme b + y est à y, ce que y est à x, l'équation s'écrira : bx + yx = yy et par conséquent $x = y^2/(b + y)$. »

22 Debeaune Florimond, Lettre à Roberval, in *Œuvres de Descartes,* Tome V, pub. par C. Adam et P. Tannery. L.Cerf 1903, p519.

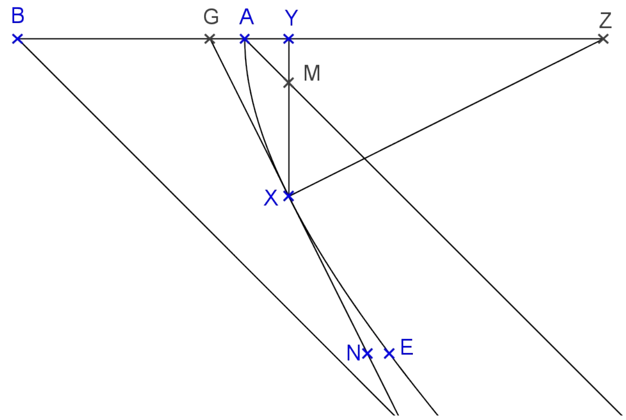


Figure 3

et le second dans une lettre de Descartes ultérieure non datée et de destinataire inconnu :

[...] Et touchant les lignes courbes on pourroit proposer celle-cy.

Data qualibet linea recta N. Et ductis aliis duabis lineis indefinitis, ut GD, Et FE, quae se in puncto A ita intersecent, ut angulus EAD sit 45 graduum ; Quaeritur modus describendi lineam curvam ABO, quae sit talis naturae, ut a quocumque eius puncto ducantur tangens & ordinata ad diametrum GD, (quemadmodum hic à puncto B ductae sunt tangens BL, & ordinata BC.) semper sit eadem ratio istius ordinatae BC, ad CL, segmentum diametri inter ipsam & tangentem intercepti, quae est linea datae N, ad BI, Segmentum ordinatae à curva ad rectam FE porrectae.[23]

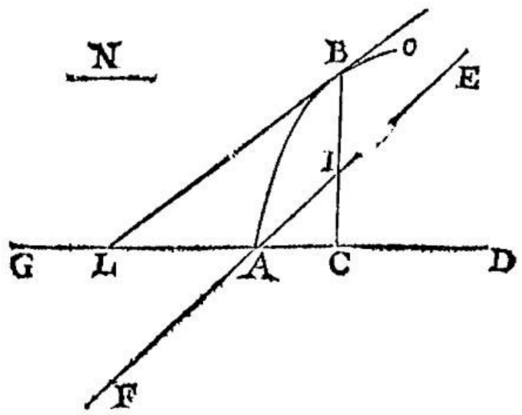


Figure 4 : source gallica.bnf.fr/BnF

Cette question me fut proposée il y a cinq ou six ans par Monsieur de Beaune, qui la proposa aussi aux plus celebres Mathematiciens de Paris & de Thoulouze ; Mais ie ne sçache point qu'aucun d'eux luy en ait donné la solution, ny aussi qu'il leur ait fait voir celle que je luy ay envoyée. [...][24]

[23] « Un segment quelconque N est donné. Et deux autres lignes droites GD et FE sont tracées, qui se coupent au point A en faisant un angle EAD de 45°. On demande un moyen de décrire une ligne courbe ABO, qui soit de telle nature, que si de chacun de ses points on trace la tangente et l'ordonnée relative au diamètre GD (comme par exemple au point B sont tracées la tangente BL et l'ordonnée BC) le rapport de cette ordonnée BC au segment de sous-tangente CL soit le même que celui du segment donné N au segment d'ordonnée BI situé entre la courbe et la droite FE. »

[24] Descartes, René. *Lettres de M. Descartes* [publié par Claude Clerselier]. Tome III. Paris, 1657-1667, p459-460.

L'équivalence des énoncés[25] est immédiate puisque le rapport de la sous normale à l'ordonnée est égale au rapport de l'ordonnée à la sous tangente ; (dans la figure 3 $\frac{ZY}{YX}=\frac{YX}{YG}$).

C'est la seconde forme de l'énoncé qui passera à la postérité car la lettre dans laquelle il figure fait partie de l'édition Clerselier.[26] Le deuxième problème de Debeaune consiste donc à trouver une courbe telle que le rapport de l'ordonnée à la sous tangente soit toujours égal au rapport d'une longueur donnée N à la différence entre l'ordonnée et l'abscisse. Avec les notations de Leibniz, nous pouvons aujourd'hui écrire ce problème sous cette forme : $\frac{dy}{dx}=\frac{N}{y-x}$ dans laquelle nous reconnaissons une équation différentielle du premier ordre[27].

Quant aux deux derniers problèmes Descartes indique seulement que le troisième est une variante du second et qu'il n'a pas eu le temps de chercher le quatrième (cf. infra).

Ajoutons pour finir que l'origine de ces problèmes se trouve vraisemblablement dans les recherches en physique de Debeaune. En effet celui-ci indique dans une lettre à Mersenne[28] du 5 mars 1639 qu'il a besoin de ses lignes pour prouver l'isochronisme des oscillations d'un pendule et des vibrations d'une corde de luth.

La « méthode des deux tangentes » utilisée par Descartes

Reprenons maintenant le fil de la lettre du 20 février 1639 et regardons comment Descartes s'y prend pour résoudre ces problèmes inverses des tangentes sans le secours du calcul différentiel. En fait sa procédure utilise l'intersection de deux tangentes et s'appuie implicitement sur une conception première de la tangente, droite touchant la courbe en un point de telle façon que celle-ci soit toujours située du même côté de cette droite[29] ; conception dont la validité est restreinte aux courbes représentatives de fonctions convexes (ou concaves). Cette méthode nous fait penser à la recherche de l'enveloppe d'une famille de droites et il faut noter qu'à la fin du 17e siècle on utilisera pour déterminer la développée d'une courbe l'intersection de deux tangentes infiniment proches.

> *Il y a bien vne autre façon qui est plus generale, & a priori, à sçauoir par l'intersection de deux tangentes, laquelle se doit tousjours faire entre les deux points où elles touchent la courbe, tant proches qu'on puisse les imaginer. Car en considérant quelle doit estre cette courbe, afin que cette intersection se fasse tousjours entre ces deux points, & non au deça ny au delà, on en peut trouuer la construction ; mais il y a tant de diuers chemins à tenir, & ie les ay si peu pratiquez, que ie n'en sçaurois encore faire*

[25] Dans l'énoncé de Debeaune la longueur donnée est AB, dans celui de Descartes c'est N. On ne s'arrêtera pas sur le fait que dans la lettre de Debeaune la courbe est tracée en dessous de l'axe alors que dans celle de Descartes elle est tracée au dessus puisque seules les ordonnées positives sont considérées à l'époque.

[26] Johann Bernoulli et Montucla énoncent le problème sous cette forme et Johann Bernoulli fait explicitement référence à la lettre de l'édition Clerselier. (cf. bibliographie [14] p146 & b[8] p62)

[27] Nous proposons en annexe à la fin de cet article une petite étude mathématique de cette E.D.

[28] cf. bibliographie [4] p534-536.

[29] C'est la définition qu'Euclide utilise pour la tangente au cercle : « Une droite qui, rencontrant un cercle et prolongée, ne le coupe pas, est dite être tangente au cercle. » (cf. bibliographie [11] p387)

un bon conte. Toutesfois vous verrez icy en quelle façon ie m'en suis seruy pour vos trois lignes courbes.[30]

Une fois n'est pas coutume dans ce passage Descartes s'éloigne un peu de son souci de clarté habituel. Que peut bien signifier l'expression « cette intersection se fait toujours entre ces deux points, & non au deçà ni au delà » sachant que le dit-point d'intersection n'est pas aligné avec les deux autres ? L'usage qu'il en fait dans la suite de la lettre laisse à penser qu'il parle des projetés de ces points sur l'axe des abscisses (cf. figure 5), encore faut-il, pour avoir cette propriété, imposer des conditions à la courbe ainsi que nous allons le vérifier dans la digression mathématique qui suit.

Considérons une fonction f définie et dérivable sur un certain intervalle I et telle que f' soit strictement monotone sur I. Autrement dit f est convexe sur I ou f est concave sur I. Soient a et b deux éléments de I avec $a < b$. Comme $f'(a) \neq f'(b)$, les tangentes à la courbe aux points A(a, $f(a)$) et B(b, $f(b)$) ont toujours un point d'intersection C. Un calcul simple montre que l'abscisse c de C vérifie : $c = \dfrac{b\,f'(b) - a\,f'(a) + f(a) - f(b)}{f'(b) - f'(a)}$.

Pour fixer les idées supposons f' strictement croissante sur I, on sait alors d'après le théorème des accroissements finis que : $(b-a)\,f'(a) < f(b) - f(a) < (b-a)\,f'(b)$.

On en déduit que :

$$a\,f'(b) - a\,f'(a) < b\,f'(b) - a\,f'(a) + f(a) - f(b) < b\,f'(b) - b\,f'(a) \quad ;$$

d'où l'on tire immédiatement : $a < c < b$.

Si l'on suppose f' strictement décroissante un calcul analogue conduira à la même conclusion. D'autre part il est facile de vérifier que la stricte monotonie de f' est bien une condition nécessaire (cf. figure 6).

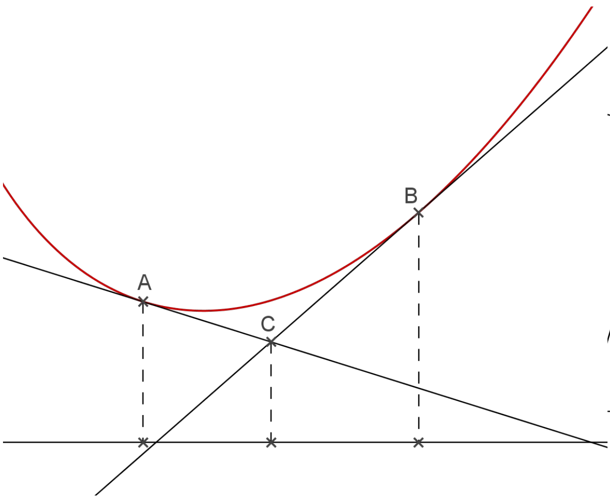


Figure 5

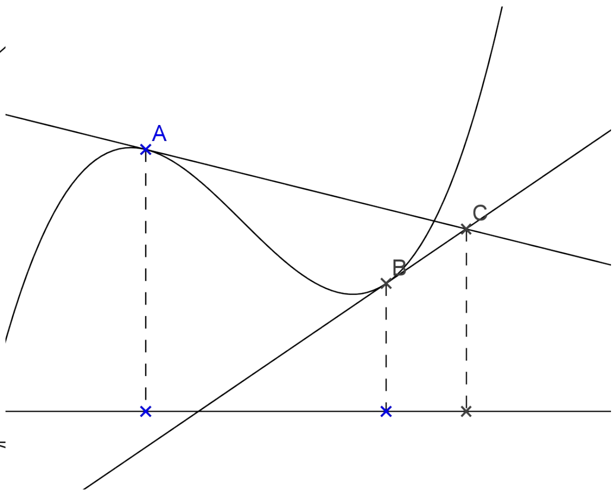


Figure 6

[30] Descartes, René. *Œuvres,* pub. par C. Adam et P.Tannery, Correspondance. Tome II. Vrin 1988, p514.

Revenons maintenant au texte de Descartes. Dans sa recherche de la solution du deuxième problème, celui-ci a découvert que la courbe cherchée avait une asymptote faisant un angle de 45° avec l'axe des abscisses[31] puis en a trouvé une caractérisation relative à des segments portés par cette asymptote :

> *En la deuxième, AVX, dont le sommet est A, au lieu de considerer l'axe AY avec son ordonnée XY, i'ay consideré l'asymptote BC, vers laquelle ayant mené des ordonnées parallèles à l'axe, comme PV, RX, &c., & des tangentes comme AC, ZVN, GXM, &c., i'ay trouué que la partie de l'asymptote qui est entre l'ordonnée & la tangente d'vn mesme point, comme PN, ou RM, &c., est tousjours égale à BC, ainsi que vous verrez facilement par le calcul.*[32]

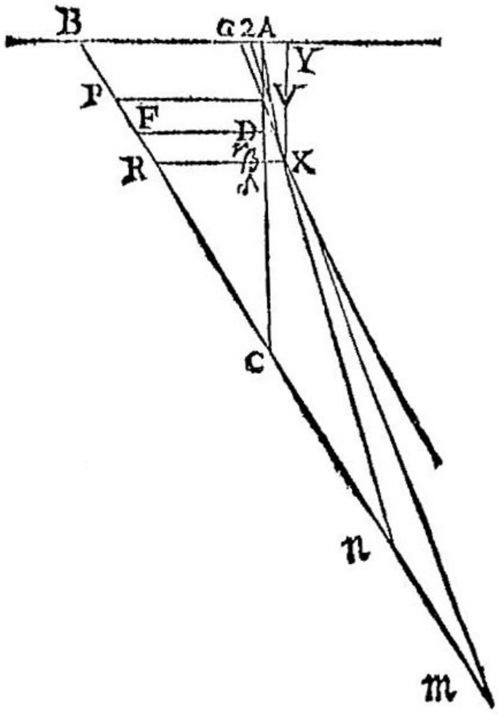


Figure 7: source gallica.bnf.fr/BnF

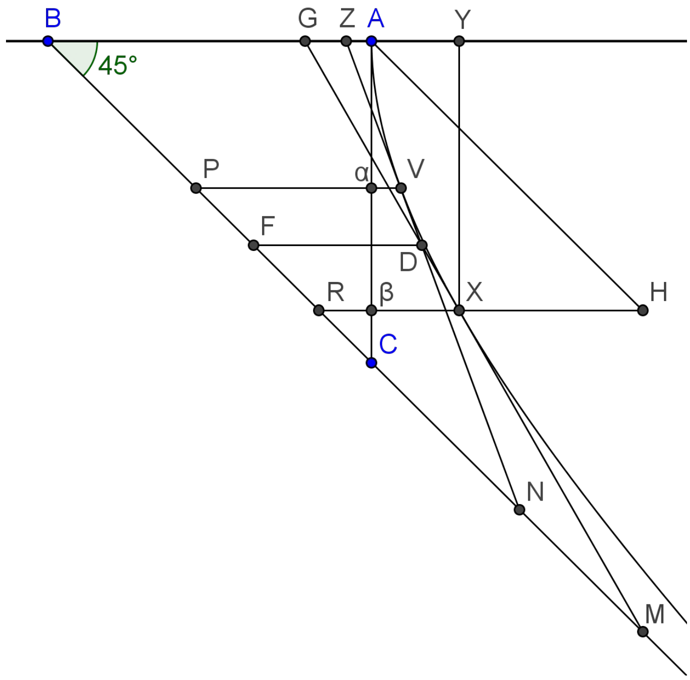


Figure 7 bis

La figure originale de l'édition Clerselier (figure 7) doit être complétée ; le point H dont Descartes parle un peu plus loin n'y apparaissant pas. Ce point H est l'intersection de la droite RX avec la parallèle à la droite BC passant par A. Par ailleurs ce point H est utile pour faire le lien avec le problème initial précédemment cité. Il est clair que XH = XY – AY et par conséquent la condition que doit vérifier la tangente au point X quelconque de la courbe s'écrit : $\frac{XY}{YG}=\frac{AB}{XH}$. Descartes affirme avoir montré facilement que le point courant X de la courbe doit vérifier : RM = BC ; voici comment on peut montrer l'équivalence entre ces deux conditions.

31 Il paraît vraisemblable qu'en cherchant à construire la courbe point par point, on puisse conjecturer son asymptote (cf. annexe). Debeaune dit que Roberval lui aussi avait trouvé cette asymptote. (cf. bibliographie [4] p.517)

32 Ibid. p.514-515

Nous supposons en premier lieu que : $\frac{XY}{YG}=\frac{AB}{XH}$. Soit M' le point d'intersection de la tangente GX avec la parallèle à la droite AC passant par H ; les triangles rectangles GYX et XHM' étant semblables, nous avons : $\frac{XY}{YG}=\frac{M'H}{XH}$ et par conséquent : AB = M'H. Comme AB = RH nous avons prouvé que les triangles BAC et RHM' sont isométriques ce qui entraîne que M' appartient à la droite BC (soit M' = M) et RM = BC.

Réciproquement si nous supposons que RM = BC, comme RH = AB alors les triangles BAC et RHM sont isométriques et les droites MH et AC sont parallèles. Nous en déduisons que le triangle XHM est rectangle (en H) et semblable au triangle GYX d'où : $\frac{XY}{YG}=\frac{MH}{XH}=\frac{AB}{XH}$.

Ce résultat préliminaire étant acquis, reprenons le fil du raisonnement de Descartes qui va s'appuyer sur sa « méthode des deux tangentes ». Considérant deux tangentes à la courbe aux points V et X, il va déterminer un encadrement de la longueur PR du projeté du segment VX sur l'asymptote BC (qui joue en quelque sorte le rôle d'un nouvel axe). Les points V et X ont été choisis de façon que les longueurs PV et RX soient deux termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison *-b/m* où *b* = AB et *m* est un entier quelconque. Descartes utilise donc le fait que la distance entre le point courant de la courbe et son asymptote (prise parallèlement à l'axe AB) décroit à partir de AB.

> *Or d'autant que les deux lignes ZVN & GXM touchent la courbe aux points V & X, elles doiuent necessairement s'entrecoupper en l'espace qui est entre ces deux points, tant proches qu'ils puissent estre, comme, par exemple, au point D, par lequel ie mene FD parallele à PV. Et ie nomme AB = b, NP = b√2, PF = ε, FR = ω,* $PV=\frac{nb}{m}$ *, &* $RX=\frac{nb-b}{m}$ *, entendant par m vn nombre de parties égales, ausquelles ie suppose que toute la ligne b est diuisée ; & par n vn autre moindre nombre, qui exprime combien la ligne PV contient de telles parties ; en sorte que, si m est* 16*, & n est* 13*, i'ay* $PV=\frac{13b}{16}$ *, &* $RX=\frac{12b}{16}$ *; car ie suppose RX moindre que PV d'vne de ses parties seulement. Apres cela ie procede en cette sorte.*
>
> *Comme NP =* $b\sqrt{2}$ *est à* $PV=\frac{nb}{m}$ *, ainsi* $NF=b\sqrt{2}-\varepsilon$ [33] *est à* $FD=\frac{nb}{m}-\frac{n\varepsilon}{m\sqrt{2}}$ [34]*; et comme MR =* $b\sqrt{2}$ *est à* $\frac{nb-b}{m}$ *, ainsi* $b\sqrt{2}+\omega$ [35] *est à*

33 Parce que F est entre P et R, alors NF = NP – PF.

34 Les triangles PVN et FDN sont homothétiques, donc NP : PV = NF : FD et $FD=\frac{b\sqrt{2}-\varepsilon}{\sqrt{2}}\times\frac{n}{m}=\frac{nb}{m}-\frac{n\varepsilon}{m\sqrt{2}}$

35 MF = MR + FR = $b\sqrt{2}+\omega$ parce que F est entre P et R.

$$FD = \frac{nb-b}{m} + \frac{n\omega}{m\sqrt{2}} - \frac{\omega}{m\sqrt{2}}$$ [36].

Si bien que i'ay FD en deux façons, qui me donnent : $\frac{b}{m} = \frac{n\omega - \omega + n\varepsilon}{m\sqrt{2}}$ *, ou bien* $b\sqrt{2} = n\omega - \omega + n\varepsilon$ *. Ce qui monstre que PR, que i'ay nommée* $\varepsilon + \omega$ *, est* $\frac{b\sqrt{2}+\omega}{n}$ *, ou bien* $\frac{b\sqrt{2}-\varepsilon}{n-1}$ [37]*: c'est à dire que PR est necessairement plus grande que* $\frac{b\sqrt{2}}{n}$ *, & plus petite que* $\frac{b\sqrt{2}}{n-1}$ *, ou bien, afin de rejetter le nombre sourd* $\sqrt{2}$ [38]*, que la ligne* $\alpha\beta$ *est plus grande que* $\frac{b}{n}$ *, & plus petite que* $\frac{b}{n-1}$ *.*[39]

A partir du l'encadrement de αβ qu'il vient de trouver, Descartes sait obtenir un encadrement de Aα qui est l'ordonnée du point courant V. Descartes ne donne que deux exemples, voici comment on peut obtenir la formule générale. L'encadrement précédent $\frac{b}{n} < \alpha\beta < \frac{b}{n-1}$ est valable pour tout entier n tel que $2 \le n \le m$, si l'on considère que Aα est l'ordonnée du point V correspondant à $PV = \frac{nb}{m}$ on aura par sommation membre à membre

$$\sum_{k=n+1}^{m} \left(\frac{b}{k}\right) < A\alpha < \sum_{k=n}^{m-1} \left(\frac{b}{k}\right) \quad .$$

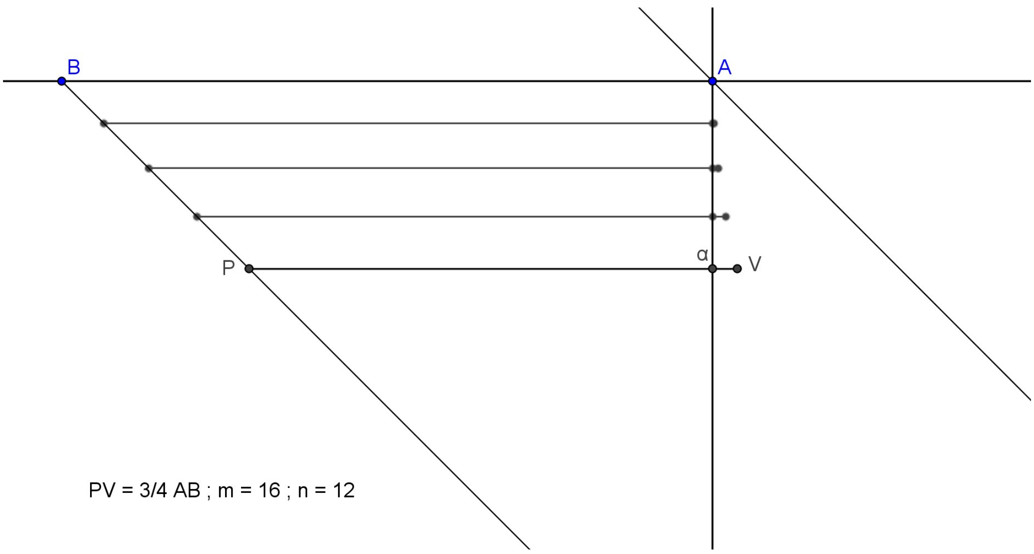


Figure 8

[36] Les triangles MFD et MRX sont homothétiques, donc MR : RX = MF : FD et
$$FD = \frac{b\sqrt{2}+\omega}{\sqrt{2}} \times \frac{n-1}{m} = \frac{(n-1)b}{m} + \frac{(n-1)\omega}{m\sqrt{2}}$$

[37] Comme F est entre P et R, PR = PF + FR = ω + ε ; d'autre part $b\sqrt{2} = (\omega+\varepsilon)n - \omega = (\omega+\varepsilon)(n-1) + \varepsilon$ d'où les deux expressions de PR données par Descartes.

[38] Nombre sourd : nombre irrationnel . Les points α et β sont les intersections de (PV) et (RX) avec (AC), cf. fig.7bis.

[39] Ibid. p515-516.

Les exemples fournis par Descartes dans l'extrait suivant correspondent à $m = 8$ et $n = 6$ pour le premier (Aα est alors la somme de deux longueurs) , $m = 16$ et $n = 12$ pour le second (Aα est alors la somme de quatre longueurs, cf. figure 8)

> *Et pour ce que le mesme se doit entendre de toutes les ordonnées paralleles à l'axe, qui ne different l'vne de l'autre que d'vne des parties de la ligne AB, cecy suffit pour demonstrer que, si on diuise cette ligne AB en 8, & que PV contienne par exemple* $\frac{3}{4}b$ *, Aα sera plus grande que* $\frac{1}{8}b+\frac{1}{7}b$ *, & moindre que* $\frac{1}{7}b+\frac{1}{6}b$ *; et que, si on diuise AB en 16, Aα sera plus grande que* $\frac{1}{16}b+\frac{1}{15}b+\frac{1}{14}b+\frac{1}{13}b$ *, & moindre que* $\frac{1}{15}b+\frac{1}{14}b+\frac{1}{13}b+\frac{1}{12}b$ *, & ainsi des autres. De façon que, diuisant AB en plus de parties, on peut approcher de plus en plus, à l'infiny, de la iuste longueur des lignes Aα, Aβ, & semblables, & par ce moyen construire Mechaniquement la ligne proposée.*[40]

Nous ne résisterons pas à la tentation de poursuivre le calcul initié par Descartes et ainsi trouver la juste longueur de la ligne Aα. Si on prend $m = 2^{p+2}$ et par conséquent $n = 3\times2^p$, $\frac{A\alpha}{b}$ est encadré par les termes de deux suites adjacentes $u_p=\sum_{k=3\times2^p+1}^{2^{p+2}}\frac{1}{k}$ et $v_p=\sum_{k=3\times2^p}^{2^{p+2}-1}\frac{1}{k}$. Pour trouver leur limite commune il suffit de reconnaître qu'il s'agit de sommes de Riemann attachées à la fonction inverse et relatives au segment [6 ; 8]. (cf. figures 9, 10 & 11)

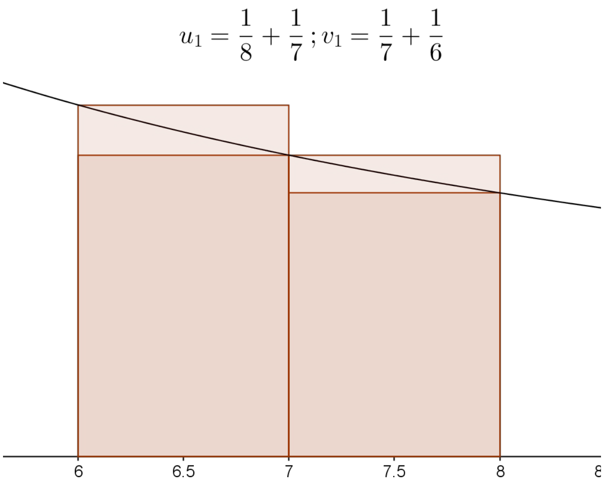


Figure 9

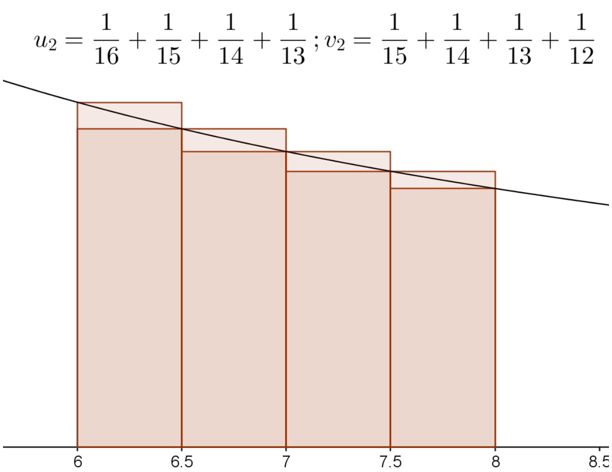


Figure 10

[40] Ibid. p516.

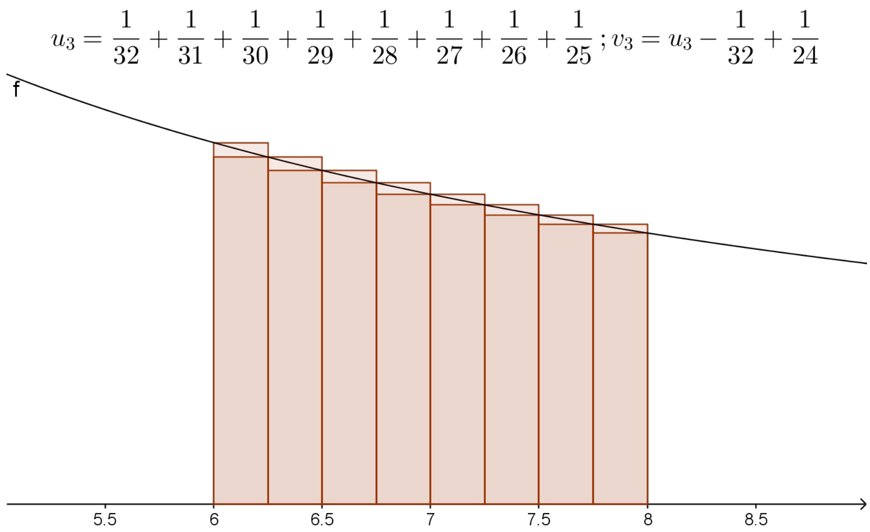


Figure 11

Par conséquent $A\alpha = \int_6^8 \frac{dt}{t} = \ln(\frac{4}{3})$. Et l'on voit que le calcul de Aα dépend de la quadrature de l'hyperbole, or cette quadrature ne sera réalisée qu'en 1647 par Grégoire de Saint Vincent, soit huit années après la rédaction de la lettre de Descartes à Debeaune.

Dans le paragraphe suivant Descartes va donner une description cinématique de la courbe solution. A cette fin il considère le point V comme étant l'intersection de deux droites en mouvement : la première se déplace à vitesse constante en restant parallèle à la droite BC (il s'agit de la droite Γ sur la figure 12), la seconde se déplace en restant parallèle à l'axe AB (la droite Δ sur la figure 12) ; la question est donc d'évaluer la vitesse de la seconde. Pour ce faire il est possible de comparer les déplacements respectifs de ces deux droites pendant un même "court" intervalle de temps. Le lecteur pourra constater que le raisonnement de Descartes est assez succinct. Nous allons nous en écarter sensiblement dans les explications qui suivent en utilisant la définition mathématique de la vitesse instantanée dont ne disposait pas Descartes. La position de la droite Γ sera repérée par celle de son point d'intersection Q avec l'axe AB, celle de la droite Δ par la position de son point d'intersection α avec la droite AC. Lorsque la distance BQ décroît de la valeur $\frac{nb}{m}$ à la valeur $\frac{nb-b}{m}$, la distance Aα augmente de la valeur αβ dont un encadrement a été calculé précédemment par Descartes : $\frac{b}{n} < \alpha\beta < \frac{b}{n-1}$, par conséquent on obtiendra en divisant par $\frac{b}{m}$ un encadrement du rapport des accroissements simultanés de Aα et BQ : $\frac{m}{n} < \frac{m\alpha\beta}{b} < \frac{m}{n-1}$. Posons $k = \frac{n}{m}$ (que nous supposons constant) et $\tau(m) = \frac{m\alpha\beta}{b}$ on peut alors réécrire l'encadrement :

$\frac{1}{k} < \tau(m) < \frac{m}{km-1}$. Il est clair que lorsque m tend vers l'infini le rapport $\tau(m)$ a pour limite $\frac{1}{k}$.

On pourrait faire un raisonnement analogue pour obtenir un encadrement de $\tau(m)$ lorsque la distance BQ décroît de la valeur $\frac{nb+b}{m}$ à la valeur $\frac{nb}{m}$ qui donnerait la même valeur limite pour $\tau(m)$. De tout ceci il résulte qu'au point V le rapport de la vitesse de la droite Δ à celle de la droite Γ est proportionnel à l'inverse de BQ (ou PV).

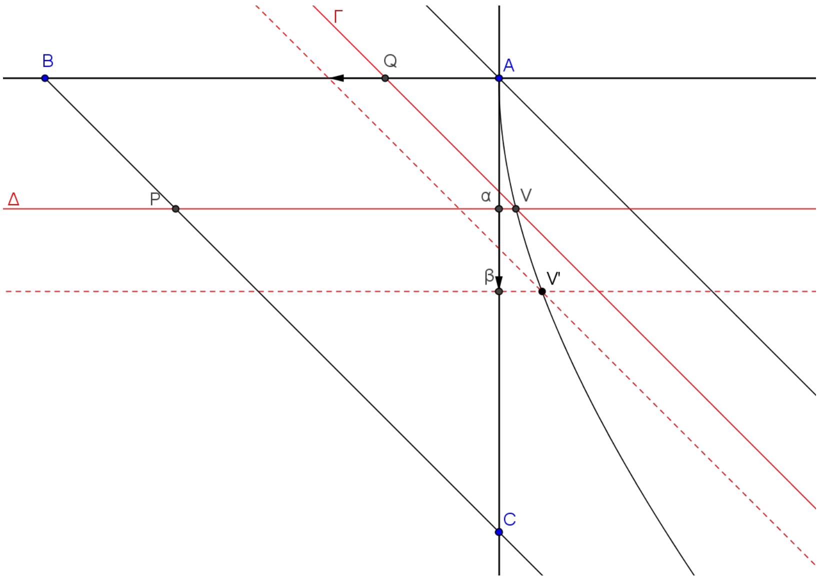


Figure 12

Descartes va arriver à ce même résultat en comparant les accroissements de Aα et BQ sur deux exemples et en distinguant deux cas selon que l'on se place à gauche ou à droite du point Q ; dans le premier cas $\tau(m) > \frac{1}{k}$ et dans le second cas $\tau(m) < \frac{1}{k}$ d'où il déduira sans autre argument que la vitesse de la droite Δ lorsque AQ = $(1-k)b$ est proportionnelle à $1/k$.

Pour le premier exemple $BQ = \frac{n}{m} = \frac{1}{2}$ donc $\tau(m)$ a pour limite 2.

> *De plus, à cause que, RX estant ½ b, on ne sçauroit imaginer, en la ligne Aβ, aucun point au dessus de β, comme γ, qui soit si proche de β qu'il ne se demonstre, par cecy, que l'interualle γβ est moindre que le double de la différence qui sera entre l'ordonnée RX & l'ordonnée qui passera par le point γ; et qu'au contraire on ne sçauroit imaginer aucun point au dessous de β, comme δ, qu'il ne se demonstre que l'intervalle βδ est plus grand que le double de la différence qui est entre l'ordonné RX & celle qui passe par δ;* [41] (cf. figure 13)

[41] Ibid. p516.

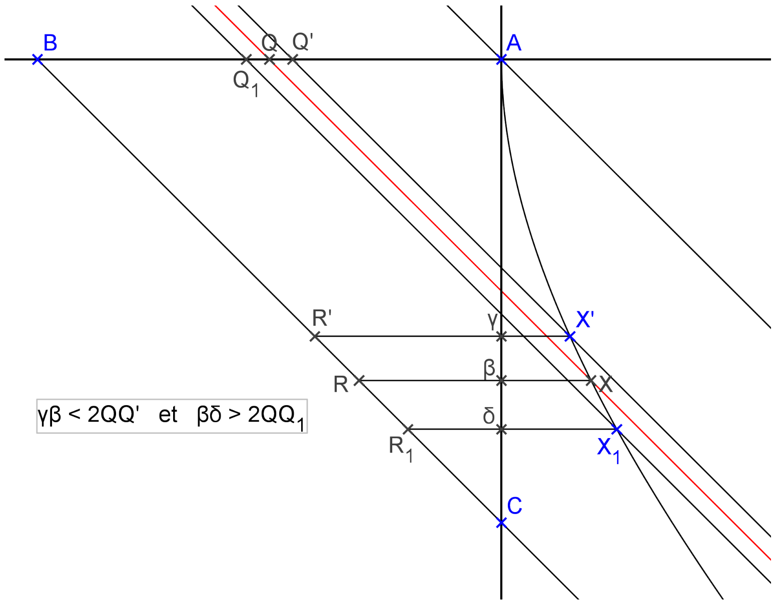


Figure 13

Pour le second exemple Descartes prend $BQ=\frac{n}{m}=\frac{3}{4}$ donc $\tau(m)$ a pour limite $\frac{4}{3}$.

> *et que tout de mesme que, PV étant ¾ b, on ne sçauroit mener aucune autre ordonnée au dessus d'elle, comme par le point η, que la ligne $\alpha\eta$ ne soit moindre que 4/3 de leur difference ; ny aucune au dessous, comme θ, que $\alpha\theta$ ne soit plus grande que 4/3 de leur difference, & ainsi des autres ;* [42]

Descartes est maintenant en mesure de donner sa description de la courbe solution :

> *Cela monstre que, pour décrire exactement cette courbe AVX, il faut mouuoir deux lignes droites en telle sorte, que l'vne estant appliquée sur la ligne AH, & l'autre sur AB, elles commencent à se mouuoir en mesme temps également viste, AH vers BR, et AB vers RH* [43]*; & que celle qui se meut de AH vers BR retienne toujours la mesme vitesse, mais que l'autre qui descend de BA parallele à RH, augmente la sienne en telle proportion, que si elle a vn degré de vitesse en commençant, elle en ait 8/7 lorsque la premiere a parcouru la huitième partie de la ligne AB, e& 8/6 ou 4/3 lorsque la premiere a parcouru le quart de AB, & 8/5, 8/4, 8/3, 8/2, & 8 & 16 & 32, &c., lorsque la premiere arriue à 3/8, 4/8, 5/8, 6/8, & 7/8 & 15/16 & 31/32, &c., de la ligne AB, et ainsi à l'infiny ; et l'intersection de ces deux lignes droites décrira exactement la courbe AVX, qui aura les proprietez demandées.* [44](cf. figure 14)

Autrement dit en reprenant les notations que nous avons précédemment introduites, si dans le mouvement de la droite Γ le point Q se déplace à vitesse uniforme de A vers B alors la droite Δ se déplace avec une vitesse inversement proportionnelle à la distance qu'il reste à parcourir au point Q. (cf. figure 14).

---

42 Ibid. p516-517.

43 Les notations font référence à la figure 7bis : BR est l'asymptote et AH est la parallèle à celle-ci passant par A.

44 Ibid. p517.

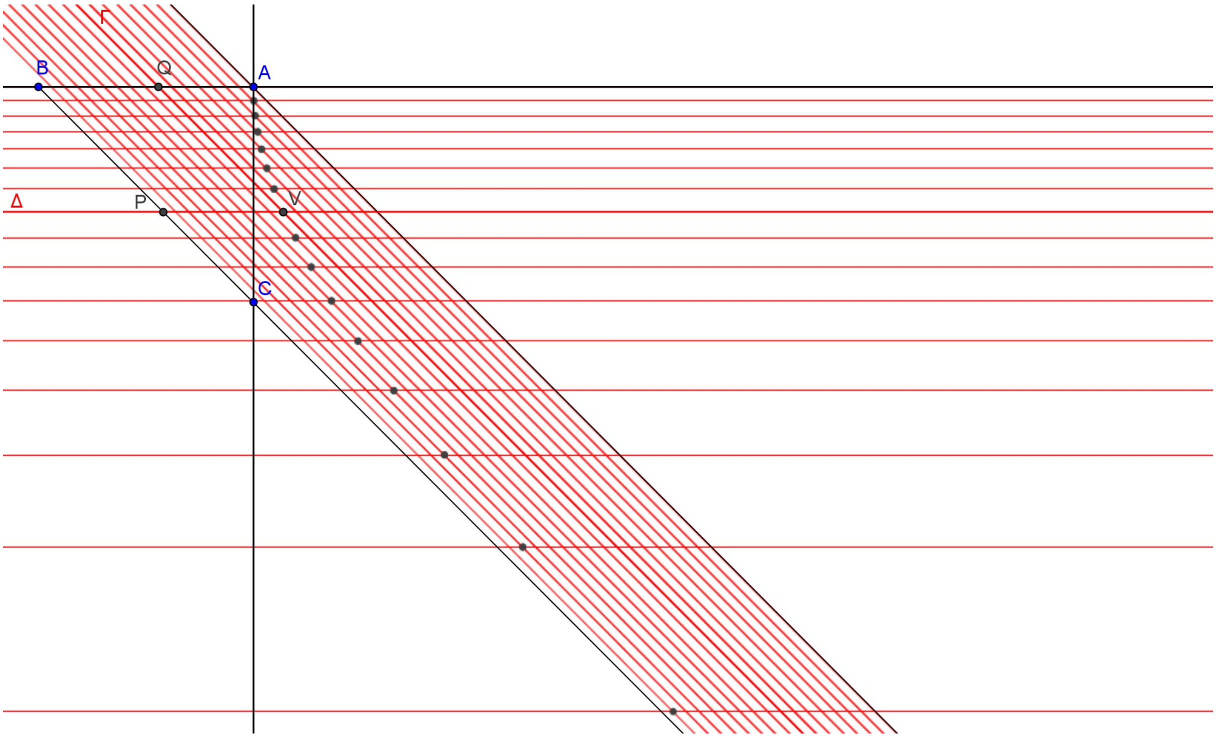


Figure 14

Descartes ajoute qu'il pense (à juste titre) que la courbe en question n'est pas algébrique.

> *Mais ie croy que ces deux mouuemens sont tellement incommensurables, qu'ils ne peuuent estre reglez exactement l'vn par l'autre ; et ainsi que cette ligne est du nombre de celles que i'ay rejetées de ma Geometrie, comme n'estant que Mechanique ; ce qui est cause que ie ne m'estonne plus de ce que ie ne l'auois pû trouuer de l'autre biais que i'auois pris, car il ne s'estend qu'aux lignes Geometriques.* [45]

Le passage de la lettre consacré aux lignes de Debeaune se termine par l'évocation des deux derniers problèmes où l'on apprend que la troisième ligne serait de même nature que la deuxième mais avec une asymptote perpendiculaire à l'axe AB :

> *Pour vostre troisiéme ligne courbe, vous voyez assez qu'elle est de mesme nature, & se décrit de mesme façon que cette seconde, sans qu'il y ait autre difference, sinon qu'au lieu qu'en celle-cy l'angle BAH est de 135 degrez, & HAY de 45, ils doiuent estre tous deux droits en l'autre.*
>
> *Pour la quatrieme, ie ne l'ay point du tout examinée, & ie n'en pourrois auoir le loisir, si ie ne differois à vn autre voyage à vous écrire ; mais ie m'assure que vous aimerez mieux en faire la recherche.*[46]

[45] Ibidem

[46] Ibid. p517-518

Une courbe logarithmique

On peut constater qu'à aucun moment le mot logarithme n'est prononcé par Descartes. Faut-il en conclure pour autant qu'il n'en a pas vu le lien avec la courbe solution ? Examinons d'abord les opinions exprimées par différents auteurs sur ce sujet. A la fin de son article *nova methodus pro maximis et minimis*[47] Leibniz donne sa solution du problème des courbes à sous tangente constante[48] et émet un avis très sévère sur le travail de Descartes :

En guise d'appendice, je voudrais ajouter la solution du problème que Monsieur De Beaune a posé à Descartes, que ce dernier tâcha de résoudre au tome 3 de ses Lettres, mais en vain [...] [49]

Dans son histoire des mathématiques, Jean Etienne de Montucla fournit une analyse plus détaillée et nuancée de la solution de Descartes :

> *Ce problême est assez difficile, même en usant des ressources du calcul intégral ; mais le génie sait se frayer des voies particulières, et Descartes ne fut pas aussi court à ce sujet que le dit M. Bernoulli dans ses Lectiones calculi integralis ; car il trouva 1° que cette courbe avoit une asymptote parallèle à la ligne AH, et passant par le point C, éloigné de A d'une quantité égale à la donnée N. 2° Que menant GI parallèle à CE et GK tangente au point G, la soutangente IK étoit constante, propriété qui seule suffit pour conclure que cette courbe est une logarithmique dont les ordonnées sont inclinées à l'axe d'un angle de 45°. 3° Il la construisit par la combinaison de deux mouvemens, ou par l'intersection continuelle de deux règles dont les vîtesses étoient, l'une uniforme, l'autre variée, suivant une certaine loi qui permet d'en trouver tant de points qu'on voudra. Il la déclara enfin du nombre des courbes mécaniques, et c'est en effet une logarithmique à ordonnées inclinées.*[50]

Paul Tannery dans les notes accompagnant la réédition de la lettre du 20 février 1639 est lui convaincu que Descartes a reconnu le lien avec les logarithmes qui, il est bon de le rappeler, ne sont à son époque que des nombres figurant dans des tables qui servent d'outils de calculs :

> *Après avoir fait des essais qui l'ont convaincu que la relation entre les coordonnées de la courbe ne pouvait être algébrique, Descartes arrive incontestablement, par le procédé qu'il expose comme plus général, à reconnaître la véritable nature (logarithmique) de cette relation. Si, par une coquetterie d'analyste, il évite de prononcer le mot de logarithme, il ne faut pas s'y tromper ; sa description de la courbe a trop de rapports avec la façon dont Napier avait conçu les logarithmes, pour que l'on ne doive pas croire que Descartes avait une exacte connaissance de cette conception.*[51]

---

47 Il s'agit de l'article fondateur de son calcul différentiel.

48 Leibniz traduit le problème en l'équation différentielle $w=a\frac{dw}{dx}$ et en déduit immédiatement que si on prend les x en progression arithmétique (dx constant) les ordonnées w seront en progression géométrique car proportionnelles à leurs différences dw.

49 Leibniz G. W. *Naissance du calcul différentiel*, trad. Marc Parmentier. Vrin, Paris, 1995, p116-117.

50 Montucla, Jean Etienne. *Histoire des Mathématiques nouvelle édition, tome 2*. Henri Agasse, Paris, An VII, p146.

51 Descartes, René. *Œuvres,* pub. par C. Adam et P.Tannery, Correspondance. Tome II. Paris Vrin 1988, p521.

Paul Tannery fait référence à la définition des logarithmes donnée par Neper dans son traité de 1614 *Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio*. Celle-ci repose sur une image cinématique :

> *Logarithmus ergo cujusque sinus, est numerus quem proxime definiens lineam, quae aequaliter crevit interea dum sinus totius linea proportionaliter in sinum illum decrevit, existente utroque motu synchrono, atque initio aequiveloce.*[52]

Voici une présentation modernisée du modèle mécanique de Néper. β et B sont deux mobiles qui se déplacent suivant des trajectoires parallèles : le segment α ω et la demi-droite d'origine A (cf. figure 15).

β se déplace avec une vitesse proportionnelle à sa distance au point ω tandis que B se déplace à une vitesse uniforme. Les mobiles partent au même instant avec la même vitesse initiale. (A l'instant t = 0, B est en A et β est en α). Pour Néper AB est le logarithme du sinus βω.

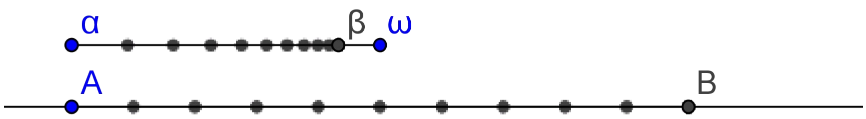


Figure 15

On ne peut que constater la similitude entre la description cinématique des logarithmes de Néper et celle de la courbe donnée par Descartes. Celui-ci avait donc tous les éléments pour conclure que les nombres Aα sont comme les logarithmes des nombres AQ. Est-il arrivé à cette conclusion et l'a-t-il tu par une coquetterie d'analyste, nous laisserons chacun se faire son opinion. Quoiqu'il en soit, cela n'ôtera rien à l'admiration que l'on éprouve devant l'ingéniosité de la démarche mise en œuvre par Descartes dans la résolution de ce problème.

Bibliographie

Textes originaux de Descartes et Debeaune

[1] Descartes, René. *Lettres de M. Descartes , où sont traittées les plus belles questions de la morale, de la physique, de la médecine et des mathématiques* [publié par Claude Clerselier]. Paris, 1657-1667.

[2] Descartes, René. *Geometria ; una cum notis Florimondi de Beaune...* ; *opera atque studio Francisci a Schooten* .... Friderici Knochii, Francofurti ad Moenum, 1695.

52 Napier John. *Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio*. 1614, p3.
« *Le logarithme de tout sinus est donc un nombre définissant avec la plus grande précision la ligne, qui a augmenté de manière uniforme pendant que la ligne du sinus total décroissait proportionnellement dans ce sinus, chacun des deux mouvements ayant lieu dans le même temps, et au commencement avec la même vitesse.* »

[3] Descartes, René. *Correspondance II, Mars 1638-décembre 1639* / Œuvres de Descartes publiées par Charles Adam et Paul Tannery. Librairie Vrin, Paris, 1988.

[4] Descartes, René. *Correspondance V, Mai 1647-février 1650* / Œuvres de Descartes publiées par Charles Adam et Paul Tannery. Leopold Cerf, Paris, 1903.

[5] Descartes, René. *La Géométrie*. A. Hermann, Paris, 1886 (réimpression J.Gabay, 1991)

Autres ouvrages

[6] Anonyme**.** *Instruction du calcul différentiel et des méthodes générales de trouver les tangentes des lignes courbes*. Manuscrit 18e siècle. Code BnF : fr. 12262.

[7] Barbin, Evelyne. *La révolution mathématique du XVIIe siècle*. Ellipses, Paris, 2006.

[8] Bernoulli, Johann. *Opera Omnia*, tomus I, *Quo continentur ea quae ab Anno 1690 ad Annum 1713 prodierunt* . Lausannae et Genevae : sumptibus Marci-Michaelis Bousquet et Sociorum, 1742

[9] Costabel Pierre. Florimond Debeaune. In *Dictionary of Scientific Biography*, Vol. 3. New York, Charles Scribner's Sons, 1971.

[10] Deleham Ph., Kientz G., Penin J.C., Perrin P. *Histoire de tangentes.* IREM de Reims, 1994.

[11] Euclide. *Les éléments. Traduction et commentaires par Bernard Vitrac*. Presses Universitaires de France, Paris 1990-1994.

[12] Gomes Teixeira, Francisco. *Traité des courbes spéciales remarquables planes et gauches* (3 tomes). Coïmbre, Imprimerie de l'Université, 1908 (rééd. Gabay, 1995).

[13] Leibniz, Gottfried Willhem. *Naissance du calcul différentiel*, 26 articles des Acta eruditorum, introduction, traduction et notes par Marc Parmentier. Paris, Librairie Philosophique J.Vrin, 1995.

[14] Montucla, Jean Etienne. *Histoire des Mathématiques nouvelle édition, tome 2*. Henri Agasse, Paris, An VII.

[15] Napier, John. *Logarithmorum Canonis Descriptio seu Arithmeticorum Supputationum Mirabilis Abbreviatio*. Lugduni 1620.

[16] Perrin, Patrick. Isaac Barrow et le théorème fondamental du calcul infinitésimal in *Comptes rendus du séminaire d'histoire des mathématiques*, Vol. 1. IREM de Reims, 2015.

Illustrations

La figure de la page 36 est une reproduction de la planche originale extraite de [2]

Les figures 4 (p37) et 7 (p40) sont des reproductions des planches originales extraites de [1]

Source gallica.bnf.fr/Bibliothèque nationale de France

Nous avons vu que le deuxième problème proposé par Debeaune pouvait s'énoncer ainsi : Construire une courbe telle que le rapport de l'ordonnée à la sous-tangente soit égal au rapport d'un segment donné à la différence entre l'ordonnée et l'abscisse (figure 16).

On cherche l'ensemble des points V tels que : $\frac{VK}{TK}=\frac{AB}{VS}$, la droite AH étant la première bissectrice du repère.

En posant a = AB = AC, x = AK, y = KV, la condition précédente s'écrit : $y'=\frac{a}{y-x}$

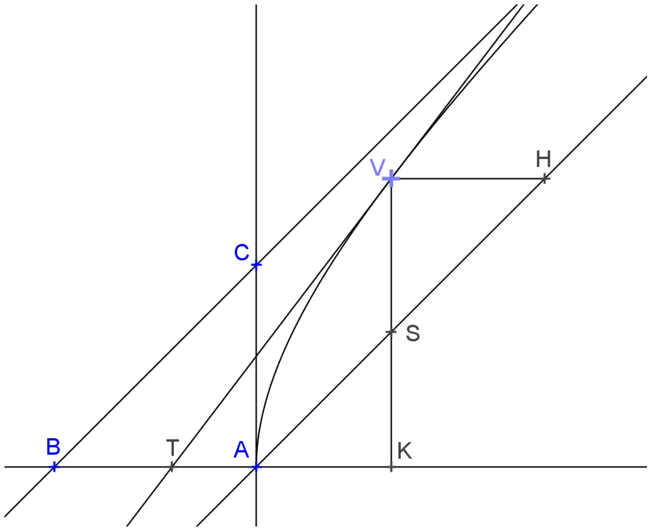


Figure 16

Dans sa lettre Descartes utilise un certain nombre de propriétés de la courbe solution (asymptote et convexité). Demandons nous tout d'abord s'il est possible de prouver ces propriétés à priori sans résoudre l'équation différentielle (E) : $y'=\frac{a}{y-x}$. En ce qui concerne la forme des courbes intégrales, l'examen du champ de vecteurs associé permet de faire quelques conjectures (figure 17)

En chaque point de la grille est tracé un segment de la tangente à la courbe intégrale passant par ce point.

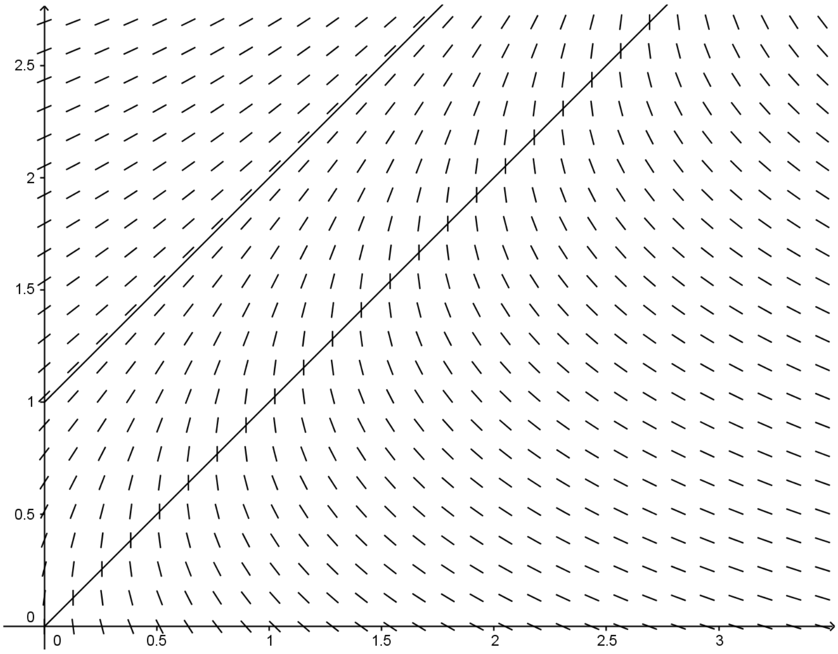


Figure 17

Si l'on s'en tient aux courbes solutions situées dans le demi-plan d'équation ($y - x > 0$), il semble que celles-ci correspondent à des fonctions strictement croissantes et qu'elles admettent la droite d'équation ($y = x + a$) comme asymptote. De plus les courbes situées dans la bande ($a > y - x > 0$) (dont fait partie la deuxième ligne de Debeaune) correspondent à des fonctions concaves. Nous nous proposons donc de démontrer ces résultats.

Remarquons tout d'abord que la droite d'équation ($y - x = a$) est une solution particulière de (E) et comme la fonction : $(x, y) \to \frac{a}{y-x}$ est de classe C^1 sur le demi-plan ouvert ($y - x > 0$) aucune autre courbe intégrale ne peut couper cette droite en vertu du théorème de Cauchy Lipschitz. Il est donc légitime de parler des courbes intégrales situées dans la bande ($a > y - x > 0$) et nous admettrons que les solutions correspondantes peuvent être définies sur un intervalle $]x_1, +\infty[$ avec $x_1 \geq 0$.

Soit y l'une de ces solutions, on a $y' > 1$ ce qui prouve que la fonction y ainsi que la fonction $y - x$ sont strictement croissantes sur $]x_1 ; +\infty[$. Comme la fonction $y - x$ est majorée par a on en déduit qu'elle admet une limite b quand x tend vers l'infini avec $b \leq a$.

Supposons par l'absurde que $b < a$; posons $\varepsilon = \frac{a-b}{2b}$ comme $\lim_{x \to +\infty} y' = \frac{a}{b}$ (= $1 + 2\varepsilon$) alors il existe un réel $A > 0$, tel que pour tout réel $t \geq A$, $y'(t) \geq 1 + \varepsilon$.

On en déduit en utilisant le théorème des accroissements finis que pour tout réel $x \geq A$, $y(x) - y(A) \geq (1 + \varepsilon)(x - A)$ et par conséquent $y(x) - x \geq \varepsilon(x - A) + y(A) - A$. Or cette inégalité est en contradiction avec le fait que la fonction $y - x$ a une limite finie b quand x tend vers l'infini.

Ce qui prouve que la droite d'équation ($y - x = a$) est asymptote aux courbes intégrales situées dans la bande ($a > y - x > 0$).

De plus comme $y'' = \frac{a(1-y')}{(y-x)^2}$ les fonctions solutions correspondantes sont bien concaves.

Résolution de l'équation différentielle :

Si l'on pose $u = y - x$, (E) devient : $\frac{udu}{u-a} = -dx$

Equation qui s'intègre facilement pour donner : $u + a \ln|u - a| = -x + Cte$

d'où l'on tire la solution générale de (E) : $y - x - a = K\,e^{\frac{-y}{a}}$

Si l'on impose à la courbe de passer par l'origine A, la valeur de K doit être égale à $-a$.

Son équation se simplifie si l'on prend pour nouvel axe des ordonnées la droite BC tout en conservant le même axe des abscisses.

Les formules de transformation sont dans ce cas : $x = X - a + \frac{\sqrt{2}}{2} Y$; $y = \frac{\sqrt{2}}{2} Y$

Et l'équation de la courbe devient : $X = a\, e^{\frac{-Y}{a\sqrt{2}}}$ ou encore $Y = -a\sqrt{2} \ln \frac{X}{a}$.

Calcul de l'aire sous la courbe :

D'après Descartes, Debeaune aurait déterminé l'aire située sous la courbe sans connaitre l'expression de celle-ci. Pour montrer comment ceci est possible nous allons calculer l'aire du domaine délimité par la courbe, la droite AH et la droite VH (cf. figure 16).

Notons s l'ordonnée du point V (i.e. s = VK) et écrivons l'équation différentielle (E) sous la forme : $\frac{dx}{dy} = \frac{y-x}{a}$. Après avoir intégré par rapport à y nous obtenons : $a\, x(s) = \int_0^s (y-x)\, dy$. Or le second membre représente l'aire du domaine cherché et le premier membre est égal au produit AB×AK. Nous avons donc exprimé cette aire en fonction uniquement de l'abscisse du point V.

Mais ce calcul repose sur le théorème fondamental du calcul infinitésimal, il faudrait donc que Debeaune ait eu connaissance du lien de réciprocité entre quadrature et calcul des tangentes (au moins dans un cas particulier) pour arriver à ce résultat...si c'est effectivement celui-ci qu'il avait obtenu.

Annexe : Frontispice du tome 3 de la correspondance de Descartes (Édition Clerselier)

LETTRES

DE

M^R. DESCARTES

Où il répond à plusieurs difficultez, qui luy ont esté proposées sur la Dioptrique, la Geometrie, & sur plusieurs autres sujets.

TOME TROISIESME,
ET DERNIER.

A PARIS,
Chez CHARLES ANGOT, ruë S. Iacques,
au Lion d'Or.

M. DC. LXVII.

AVEC PRIVILEGE DU ROY.

Source gallica.bnf.fr/Bibliothèque nationale de France