AUTOUR DU PARADOXE DE JULES RICHARD

Jacques Borowczyk
maître de conférences de mathématiques,
membre de l'Académie de Touraine

En 1905 un professeur du lycée de Châteauroux adressa au directeur de la *Revue Générale des Sciences pures et appliquées*, une lettre qui fut publiée et commentée sous le titre « Les principes des mathématiques et le problème des ensembles ».

Son auteur, Jules Antoine Richard y énonce un paradoxe logico-mathématique qui va jouer un rôle important dans le développement des recherches sur les fondements des mathématiques, connu depuis sous le nom de paradoxe de Richard.

Image disponible uniquement sur version papier

Portrait de Jules-Antoine RICHARD (1862-1956)

Collection particulière

Expliquer l'univers matériel, tel est le but de la science. Jules Richard

Né à Blet, dans le Cher, Richard fut élève de l'école normale supérieure de 1884 à 1886, agrégé de mathématiques à vingt cinq ans et soutint, en 1901, une thèse de doctorat à la Faculté des sciences de Paris sous la direction de Kœnig. Il enseigna dans des lycées de province, dont ceux de Tours, Dijon et Châteauroux.

A Châteauroux il participa à la vulgarisation des sciences et à divers groupes érudits : espérantistes, Alliance française, Académie du Centre ; il eut pour élève Charles Sadron qui deviendra, en France, le premier biophysicien et voyagea pour diffuser ses idées dans le cadre des congrès annuels de l'Association française pour l'avancement des sciences et des publications du Cercle mathématique de Palerme et de la Société mathématique de France.

Ses travaux s'inscrivent dans la quête des fondements des mathématiques qui se développent à partir des travaux de Cantor sur la théorie des ensembles qui défient l'intuition et sur les bases axiomatiques de la géométrie.

Son nom est surtout associé à une antinomie logico-mathématique, le paradoxe de Richard, qui joua un rôle crucial dans les recherches de logique au début du XX^e^ siècle, un énoncé qui s'inclut lui même dans son champ de référence.

Ce paradoxe est exposé dans la *Revue générale des Sciences Pures et Appliquées* sous forme d'un court article (le 30 juin 1905). Voici son énoncé : *Si l'on numérote tous les nombres réels qui peuvent être définis en un nombre fini de mots de la langue française, alors on peut construire, en utilisant l'argument de la diagonale de Cantor un nombre réel hors de cette liste. Pourtant ce nombre réel a été défini en un nombre fini de mots.*

Richard eut pour correspondants Poincaré et Peano. Il conclut en 1907 les controverses qu'il avait initiées en écrivant :

> *Je n'insiste pas plus longtemps sur ce sujet, de peur de patauger dans l'infini, selon l'expression de M. Poincaré,*

ajoutant

> *Je considère ces questions comme curieuses, mais absolument oiseuses en mathématiques. La vraie mathématique, celle qui nous fait connaître le monde extérieur, n'a que faire des ensembles non dénombrables, et des objets non susceptibles d'être définis par un nombre fini de mots.* (1907).

Cependant si le nom de Richard est encore cité c'est à cause des trois variantes de son paradoxe.

Notons que jusqu'à la fin de sa vie, Richard s'adonnait aux versions latines et faisait toujours les problèmes du concours d'entrée à Polytechnique.

Richard et sa famille sont inhumés au cimetière Saint-Denis à Châteauroux.

Publications de Jules Richard

Leçons sur les méthodes de la géométrie moderne, Paris, Société d'éditions scientifiques, 1898, 238 p.

Thèses présentées à la Faculté des sciences de Paris par M. Jules Richard, 1re thèse : *Sur la surface des ondes de Fresnel...*, Châteauroux, 1901 (126 pages).

Sur la philosophie des mathématiques, Gauthier-Villars, Paris, 1903 (248 pages).

Trois articles dans les *Nouvelles Annales de mathématiques*, 4ème série, t. 3 & 4, 1903-1904.

Sur une manière d'exposer la géométrie projective, *L'Enseignement mathématique*, 1905, p. 366-374.

Les principes des mathématiques et le problème des ensembles, *Revue générale des sciences pures et appliquées*, vol. 16, nº 12, 1905, p. 541-543.

Lettre à Monsieur le rédacteur de la *Revue Générale des Sciences*, *Acta Mathematica*, 1906, p. 295-296.

Sur les principes de la mécanique, *L'Enseignement mathématique,* 1906, p. 137-143.

Considérations sur l'astronomie, sa place insuffisante dans les divers degrés de l'enseignement, *L'Enseignement mathématique*, 1906, p. 208-216.

Sur la logique et la notion de nombre entier, *L'Enseignement mathématique*, (1907) p.39-44.

Sur un paradoxe de la théorie des ensembles et sur l'axiome Zermelo, *L'Enseignement mathématique*, (1907) p. 94-98.

Sur la nature des axiomes de la géométrie, *L'Enseignement mathématique*, (1908) p.60-65.

Sur les translations, *L'Enseignement mathématique,* (1909) p. 98-101.

Sur quelques points de la philosophie des mathématiques: la logique, la notion de nombre entier et la théorie des ensembles, *Actes du congrès de Clermont-Ferrand de 1909 de l'AFAS*, (Association française pour l'avancement des sciences), p. 70-76.

Sur l'enseignement de l'astronomie, *Actes du 37e congrès de Clermont-Ferrand de 1909 de l'AFAS*, p. 76-79.

Contre la géométrie expérimentale, *Revue de l'Enseignement des Sciences*, 1910, p. 150.

Sur la philosophie de la géométrie, Châteauroux, imprimerie Langlois, 1911.

Sur l'enseignement des mathématiques, *Actes du 42e congres de Tunis de 1913 de l'AFAS*, p. 68.

La géométrie dans l'enseignement des mathématiques, *Actes du 43e congrès de 1914 de l'AFAS*,

Principes de la géométrie, dans leurs rapports avec l'enseignement, *Actes du congrès de Liège de 1924 de l'AFAS*, 1924, p. 82-83.

Considération sur la logique et la théorie des ensembles, *Revue de Métaphysique et de Morale*, 1920, 27, p. 355-369.

L'espace au point de vue concret, *Revue de Métaphysique et de Morale*, 1927, 34, p. 337-351.

De la rigueur en géométrie, *Actes du 43e congrès de Constantine de 1927 de l'AFAS*, 1928, p. 61-63.

Sur les nombres transfinis, *Actes du congrès du Havre de 1928 de l'AFAS*, p. 42-43.

Sur l'axiome de Zermelo, *Bulletin sc. Math.*, (2) 53, 1929, p. 106-109.

La géométrie (nature des axiomes, nature du raisonnement, notion d'espace), Presse universitaires de France, 1929, 55 pages.

Sur les labyrinthes (théorie de Trémaux exposée dans les *Récréations mathématiques* d'Edouard Lucas), *Actes du congrès du Havre de 1929 de l'AFAS*, p. 95-98.

Sur l'axiome de Zermelo, *Bulletin sc. Math.*, (2) 53, 1929, p. 106-109.

Réflexions sur la logique, *Actualités scientifique et industrielle,* 390, 1936, p. 18-20.

Les Principes des Mathématiques et Le Problème des Ensembles [1]

Nous avons reçu de M. J. Richard, professeur au Lycée de Dijon, la lettre suivante :

« Dans son numéro du 30 mars 1903, la Revue signale certaines contradictions qu'on rencontre dans la théorie générale des ensembles. (cf. note i)

Il n'est pas nécessaire d'aller jusqu'à la théorie des nombres ordinaux pour trouver de telles contradictions. En voici une qui s'offre dès l'étude du continu, et à laquelle plusieurs autres se ramèneraient probablement :

Je vais définir un certain ensemble de nombres, que je nommerai l'ensemble E, à l'aide des considérations suivantes :

Ecrivons tous les arrangements deux à deux des vingt-six lettres de l'alphabet français, en rangeant ces arrangements par ordre alphabétique, puis, à la suite, tous les arrangements trois à trois, rangés par ordre alphabétique, puis, à la suite, ceux quatre à quatre, etc. Ces arrangements peuvent contenir la même lettre répétée plusieurs fois, ce sont des arrangements à répétition.

Quel que soit l'entier p, tout arrangement des vingt-six lettres p à p se trouvera dans ce tableau, et comme tout ce qui peut s'écrire avec un nombre fini de mots est un arrangement de lettres, tout ce qui peut s'écrire se trouvera dans le tableau dont nous venons d'indiquer le mode de formation.

[1] NdE : nous reprenons ci-dessous l'intégralité de la lettre de Jules Richard publiée dans la *Revue générale des Sciences pures et appliquées* du 30 juin 1905. Nous avons pensé qu'il pourrait s'avérer utile pour le lecteur de l'accompagner de quelques notes que l'on trouvera en fin d'article.

La définition d'un nombre se faisant avec des mots, et ceux-ci avec des lettres, certains de ces arrangements seront des définitions de nombres. Biffons de nos arrangements tous ceux qui ne sont pas des définitions de nombres.

Soit u_1 le premier nombre défini par un arrangement, u_2 le second, u_3 le troisième, etc.

On a ainsi, rangés dans un ordre déterminé, tous les nombres définis à l'aide d'un nombre fini de mots.

Donc : Tous les nombres qu'on peut définir à l'aide d'un nombre fini de mots forment un ensemble dénombrable.

Voici maintenant où est la contradiction. On peut former un nombre n'appartenant pas à cet ensemble.

« Soit p, la n-ième décimale du n-ième nombre de l'ensemble E ; formons un nombre ayant zéro pour partie entière, et pour n-ième décimale p + 1, si p n'est égal ni à 8 ni à 9, et l'unité dans le cas contraire ». Ce nombre N n'appartient pas à l'ensemble E. S'il était le n-ième nombre de l'ensemble E, son n-ième chiffre serait le n-ième chiffre décimal de ce nombre, ce qui n'est pas. (cf. note ii)

Je nomme G le groupe de lettres entre guillemets. Le nombre N est défini par les mots du groupe G, c'est-à-dire par un nombre fini de mots ; il devrait donc appartenir à l'ensemble E. Or, on a vu qu'il n'y appartient pas.

Telle est la contradiction.

Montrons que cette contradiction n'est qu'apparente. Revenons à nos arrangements. Le groupe de lettres G est un de ces arrangements ; il existera dans mon tableau. Mais à la place qu'il occupe, il n'a pas de sens. Il y est question de l'ensemble E, et celui-ci n'est pas encore défini. Je devrai donc le biffer. Le groupe G n'a de sens que si l'ensemble E est totalement défini, et celui-ci ne l'est que par un nombre infini de mots. Il n'y a donc pas de contradiction. (cf. note iii)

On peut encore remarquer ceci : L'ensemble de l'ensemble E et du nombre N forme un autre ensemble. Le second ensemble est dénombrable. Le nombre N peut être intercalé à un certain rang k dans l'ensemble E, en reculant d'un rang tous les autres nombres de rang supérieur à k. Continuons à appeler E l'ensemble ainsi modifié. Alors le groupe de mots G définira un nombre N' différent de N, puisque le nombre N occupe maintenant le rang k, et que le k-ième chiffre de N' n'est pas égal au k-ième chiffre du k-ième nombre de l'ensemble E.

J. Richard
Professeur au Lycée de Dijon

Extrait de l'article « Considération sur la Logique et la Théorie des Ensembles » [2]

[...]

On trouve dans la théorie des ensembles beaucoup de contradictions. Les contradictions en question ne sont qu'apparentes, pourtant il est souvent assez subtil de les expliquer.

J'ai donné autrefois, dans la Revue générale des Sciences, un paradoxe que Poincaré a nommé antinomie de Richard. L'explication que j'en avais donnée alors peut être modifiée. Je vais l'indiquer ici.

Voici sommairement en quoi consiste le paradoxe. J'envisage l'ensemble E des nombres susceptibles d'être définis par un nombre fini de mots.

La définition d'un nombre avec des mots est une écriture ; c'est donc un arrangement avec répétition des vingt-six lettres de l'alphabet. Rangeons par ordre alphabétique d'abord tous les arrangements un à un, puis tous les arrangements deux à deux, puis trois à trois, etc.; parmi ces arrangements conservons ceux qui définissent des nombres, biffons tous les autres.

Le premier arrangement restant sera un, c'est le seul nombre défini avec deux lettres, le second sera dix, le troisième six ce sont les seuls de trois lettres.

Lorsqu'on trouvera dans la suite, des nombres définis antérieurement, on les biffera.

Tout arrangement définissant un nombre occupera un rang, et par suite l'infinité des nombres désignables est dénombrable.

Mais on sait qu'étant donné un ensemble dénombrable de nombres, on peut trouver un nombre n'appartenant pas à l'ensemble.

On le démontre comme il suit :

E étant l'ensemble, aux chiffres suivants :

$$0\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9$$

faisons correspondre :

$$1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 1\ 1$$

à chaque chiffre x correspond ainsi un chiffre $\phi(x)$ distinct de x. En outre $\phi(x)$ n'est jamais zéro ni 9.

Formons alors un nombre N ayant zéro pour partie entière, et pour n-ième chiffre décimal le correspondant du n-ième chiffre décimal du n-ième nombre de E.

Le nombre ainsi défini ne fait pas partie de E, car s'il en faisait partie, il occuperait un certain rang n ; son n-ième chiffre serait identique au n-ième chiffre du n-ième nombre de E, or cela n'est pas.

Cependant ce nombre est défini par un nombre fini de mots, ceux qu'on vient de lire.

[2] NdE : Dans cet article publié en 1920 dans la *Revue de Métaphysique et de Morale*, Jules Richard revient sur son célèbre paradoxe et en donne une explication légèrement différente.

Tel est le paradoxe.

Voici l'explication que je donnerai, elle diffère un peu de celle que j'ai donnée dans la Revue générale des Sciences.

Soit N ce nombre, G la phrase qui le définit. Dans la suite des arrangements de lettres qui définissent un nombre, G occupe un rang p. Pour former le nombre N nous n'aurons aucun embarras pour choisir les p - 1 premiers chiffres, mais que prendrons-nous pour son p-ième chiffre ? Le nombre N est le terme de rang p dans la suite ; c'est u_p*. Soit x le chiffre de rang p dans* u_p*, je dois prendre pour N le n-ième chiffre égal à* $\phi(x)$ *distinct de x, cela implique contradiction ; il y a contradiction à mettre N dans la suite. Je devrai donc biffer N, car si une définition implique contradiction, elle ne définit rien.*

Cela n'empêche pas la suite des nombres u_1*,* u_2 *... de définir un nombre, mais il y a contradiction à donner à ce nombre un rang dans la suite.*

D'autres paradoxes peuvent se résoudre de façon analogue.

[...]

J.Richard,
Docteur ès sciences mathématiques,
professeur au lycée de Chateauroux.

Pour en savoir plus

Borowczyk Jacques. Jules Richard (1862-1956), mathématicien : le choix du Berry. *Actes de la Ve rencontre des académies du Centre,* Éditions La Simarre, 2014, p. 53-62.

Casiro Francis. Le paradoxe de Jules Richard. *Tangente*, hors série n° 13, L'infini, 2002-2003.

Clark Mickael. *Paradoxes philosophiques et mathématiques.* Edition de l'Opportun, 2007.

Heijenoort Jean van. *From Frege to Gödel : a source Book in Mathematical Logic 1879-1931.* Harvard University Press, 1967.

Itard Jean. notice Jules Richard. *Dictionary of Scientific Biography*, New York.

Pauty Michel. *Mathématiciens en Bourgogne.* réalisation CCSTI Bourgogne, 2014, p.108-110.

Richard Jules. Les Principes des mathématiques et le problème des ensembles . *Revue générale des sciences pures et appliquées*, vol. 16, nº 12, 1905, p. 541-543.

Richard Jules. Considération sur la logique et la théorie des ensembles, *Revue de Métaphysique et de Morale*, 1920, 27, p. 355-369.

Rivenc François et Rouillan Philippe de. *Logique et fondements des mathématiques. Anthologie (1850-1914).* Payot, 1992.

Notes de l'éditeur

i) L'article de la *Revue* du 30 mars 1905 auquel Jules Richard fait référence s'intéresse principalement à la controverse suscitée par la parution de la démonstration par Ernst Zermelo de la propriété affirmant que *tout ensemble peut être bien ordonné*. Cette démonstration repose sur l'axiome du choix dont l'évidence est contestée par plusieurs mathématiciens. L'auteur de l'article prend le parti de Zermelo. L'article se termine par l'évocation des contradictions qui se présentent dans la théorie des ensembles en particulier le paradoxe formulé par Burali-Forti en 1897 concernant l'ensemble de tous les ordinaux. Pour finir de planter le décor ajoutons qu'en 1901 Bertrand Russel avait énoncé son célèbre paradoxe des classes qui ne se contiennent pas elles-mêmes. L'intérêt de ce paradoxe réside dans la simplicité des notions mises en jeu :

> *Mais normalement, une classe ne s'appartient pas à elle-même. Le genre humain (la classe des hommes), par exemple, n'est pas un homme. Formons la collection de toutes les classes qui ne sont pas éléments d'elles-mêmes. C'est bien une classe : est-elle ou non élément d'elle-même ? Si oui, c'est une des classes qui ne sont pas éléments d'elles-mêmes, i.e. elle n'est pas élément d'elle-même. Si non, elle n'est pas une des classes qui ne sont pas éléments d'elles-mêmes, i.e. elle est un élément d'elle-même. Donc chacune des deux hypothèses – qu'elle s'appartient à elle-même, qu'elle ne s'appartient pas à elle-même –, implique sa contradictoire. Ce qui constitue une contradiction.* (Bertrand Russell. *Introduction à la philosophie* mathématique. trad. F.Rivenc, Editions Payot, 1991)

ii) Pour former le nombre N Jules Richard utilise le procédé dit de la diagonale qui apparait pour la première fois dans un article de Georg Cantor intitulé *Über eine elementare Frage der Mannigfaltigkeitslehre* (Sur une question élémentaire de la théorie des multiplicités) paru en 1891.

L'objet de cet article est de fournir une preuve du théorème d'existence d'ensembles infinis non dénombrables beaucoup plus simple que celle donnée précédemment. Nous donnons ci-dessous un extrait traduit de cet article contenant cette démonstration :

> *En effet soient supposés m et w deux caractères distincts, nous considérons alors une collection M d'éléments* $E = (x_1, x_2, \ldots, x_\nu, \ldots)$*, lesquels dépendent d'un nombre infini de coordonnées* $x_1, x_2, \ldots, x_\nu, \ldots$*, où chacune de ces coordonnées est soit m soit w. Soit M l'ensemble de tous les éléments E.*
>
> *Aux éléments de M appartiennent par exemple les trois suivants :* $E^{I} = (m, m, m, m, \ldots)$, $E^{II} = (w, w, w, w, \ldots)$, $E^{III} = (m, w, m, w, \ldots)$. *J'affirme maintenant qu'une telle multiplicité M n'a pas la puissance de la suite* $1, 2, \ldots, \nu, \ldots$.
>
> *Ceci provient de la proposition suivante :*

« Soit E_1 , E_2, ..., E_ν , ... une suite quelconque simplement infini [i.e. dénombrable] *d'éléments de la multiplicité M, alors il y a toujours un élément E_0 de M, qui ne correspond à aucun E_ν. »*

Pour preuve soit

$$\begin{aligned} E_1 &= (a_{1,1}, a_{1,2}, \ldots, a_{1,\nu}, \ldots), \\ E_2 &= (a_{2,1}, a_{2,2}, \ldots, a_{2,\nu}, \ldots), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ E_\mu &= (a_{\mu,1}, a_{\mu,2}, \ldots, a_{\mu,\nu}, \ldots), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Les $a_{\mu,\nu}$ sont ici m ou w de façon déterminée. Définissons à présent une suite b_1 , b_2, ..., b_ν , ..., de telle manière que b_ν soit égal à m ou w et soit différent de $a_{\nu,\nu}$.

Autrement dit si $a_{\nu,\nu} = m$, alors $b_\nu = w$, et si $a_{\nu,\nu} = w$, alors $b_\nu = m$.

Nous considérons ensuite l'élément $E_0 = (b_1 , b_2 , b_3 , ...)$ de M, alors on voit tout simplement que l'égalité $E_0 = E_\mu$ ne peut être réalisée pour aucune valeur entière positive de μ, puisque sinon pour la valeur de μ concernée et pour toutes les valeurs entières de ν on aurait $b_\nu = a_{\mu,\nu}$, donc aussi en particulier $b_\mu = a_{\mu,\mu}$ ce qui est exclu d'après la définition de b_ν . De cette proposition il suit immédiatement que l'ensemble de tous les éléments de M ne peut être mise sous la forme d'une suite E_1 , E_2, ..., E_ν , ..., puisque sinon nous nous trouverions devant la contradiction qu'une chose E_0 serait élément de M, et ne serait pas élément de M, tout à la fois. (Georg Cantor, *Über eine elementare Frage der Mannigfaltigkeitslehre,* Jahresbericht der Deutsch. Math. Vereing. Bd. I, S. 75-78, 1890-91)

Cantor indique que le principe employé dans cette démonstration peut s'étendre à une proposition plus générale à savoir que pour tout ensemble infini L donné il existe un ensemble M de puissance supérieur à L. Il prend comme exemple l'ensemble L des réels de l'intervalle [0 ; 1], et il montre que l'ensemble M des fonctions définies sur [0 ; 1] et qui ne prennent que deux valeurs 0 ou 1 a une puissance supérieure à L. On remarquera que cet ensemble M est équipotent à l'ensemble des parties de L.

iii) Jules Richard pointe dans ce paragraphe que la source du paradoxe se trouve dans l'autoréférence des définitions puisque la phrase définissant le nombre N fait référence à l'ensemble E. D'autres paradoxes reposant sur ce même principe ont été proposées par la suite, comme ce paradoxe, ne faisant intervenir que les nombres entiers, suggéré à Bertrand Russell par G. G. Berry de la Bodleian Library, dans lequel un nombre est décrit par une phrase qui semble contredire la propriété qu'elle énonce : ainsi la phrase « le plus petit entier non nommable en moins de dix-neuf syllabes » comporte dix-huit syllabes. (réf. Bertrand Russell. Les paradoxes de la logique. *Revue de métaphysique et de morale*, 1906, année 14, n° 5, p. 645)