

Le « Triquadrilatère » de Brahmagupta

Analyse d'un texte mathématique

Satyanad Kichenassamy¹

I. Position du problème

Le Brāhma-sphuṭa-siddhānta (BSS) ou « Système précisé de Brahṁā » de Brahmagupta (628 ap. J.-C., en vers sanskrits) présente une amélioration d'un système astronomique antérieur, et vise à une meilleure « convergence du calcul et de l'observation » (en sanskrit, *dr̥ggaṇitaikya*). Les chapitres XII et XVIII, consacrés aux outils mathématiques, ont été traduits en 1817 par H. T. Colebrooke, accompagnés de deux traités du douzième siècle qui doivent beaucoup à Brahmagupta. Ces textes ont été considérés comme fondamentaux par toute la tradition ultérieure. Les principaux résultats mathématiques de Brahmagupta seront rappelés plus loin. On considère généralement que son œuvre, avec celle d'Āryabhaṭa I (499 ap. J.-C.) est l'une des sources principales des résultats et concepts d'origine indienne dans les mathématiques modernes.²

On s'intéresse ici aux propositions XII.21-32 du BSS, consacrées aux propriétés d'une figure que Brahmagupta appelle *triciturbhuja*, et qu'il ne définit pas ; ce néologisme sanskrit est rendu ici par un calque en français : « triquadrilatère ». On se propose de montrer, par l'analyse interne du texte, que la cohérence interne du texte permet de déterminer son objet, et indique en même temps les éléments d'une dérivation possible des résultats énoncés.³

II. Trois difficultés

II.1. Brahmagupta n'a pas été compris correctement par ses successeurs.

Colebrooke (1817), suivant le seul commentaire disponible, du neuvième siècle, rend « triquadrilatère » par « triangle et quadrilatère » ; cette interprétation a été suivie par tous les auteurs ultérieurs. Mais certains des résultats de Brahmagupta ne sont pas corrects pour tous les quadrilatères, on en a conclu, en Inde même, que Brahmagupta s'était trompé.⁴ C'est là une première difficulté : nous ne pouvons pas compter sur les textes postérieurs à Brahmagupta pour nous éclairer sur son texte.

¹ Laboratoire de Mathématiques, Université de Reims Champagne-Ardenne, Moulin de la Housse, B.P. 1039, F-51687 Reims Cedex 2.

Courriel : satyanad.kichenassamy@univ-reims.fr Page personnelle : <http://phare.normalesup.org/~kichenassamy>

² Sur l'influence des mathématiques indiennes hors de l'Inde, voir par exemple l'introduction de Colebrooke (1817).

³ On suit ici Kichenassamy (2010, 2012a), où l'on trouvera plus d'informations sur chacun des points discutés dans cet article. Voir également Kichenassamy (2011, 2012b). Le BSS a été édité par Dvivedin (1902) et Sharma (1966).

⁴ On trouve à partir du quatorzième siècle en Inde des traitements du quadrilatère cyclique qui utilisent des approches incompatibles avec le texte de Brahmagupta ; nous n'en parlerons donc pas.

C'est Chasles, dans son monumental « Aperçu Historique des Méthodes en Géométrie » (1837), qui comprend que les propositions de Brahmagupta fournissent des propriétés remarquables de quadrilatères cycliques, dont l'une (le « théorème de Brahmagupta » XII.30-31) n'était pas connue à son époque. Les résultats de Brahmagupta sont originaux, puisqu'ils ne se trouvent dans aucun texte antérieur. De plus, les auteurs ultérieurs ne les ont pas adoptés, ou les ont même rejetés comme incorrects. Brahmagupta devait donc posséder une dérivation de ses résultats, qu'il faut découvrir par l'examen de son texte. Cette dérivation a été recherchée par de nombreux auteurs.⁵ Chasles note également que les auteurs indiens ultérieurs se sont mépris sur ses résultats géométriques, parce qu'ils n'ont pas perçu la condition de cyclicité. Certains de ces résultats semblent néanmoins avoir été diffusés hors de l'Inde, puisque la formule de l'aire du quadrilatère cyclique (la « formule de Brahmagupta ») est énoncée sans preuve au début du 17^e siècle par Snellius. De nombreux auteurs en ont proposé des preuves ; d'autres ont simplement rejeté ces résultats parce qu'ils faisaient intervenir le produit de quatre longueurs, et qu'un tel produit ne pouvait pour eux avoir de signification géométrique.

II.2. Une géométrie sans angles ni parallèles.

Une deuxième difficulté provient des outils connus de Brahmagupta. Il ne connaît pas la notion d'angle, ni celle de parallèle. Brahmagupta présente des formules pour l'aire et les diagonales d'un triquadrilatère en termes de leurs côtés, ainsi que deux expressions pour le rayon de son cercle circonscrit : comment Brahmagupta a-t-il obtenu ces résultats avec les outils à sa disposition ?

II.3. Un discours géométrique sans figures.

Chasles remarquait déjà chez les auteurs indiens l'absence complète de figures, rendues inutiles grâce à l'introduction de termes pour désigner chacune des lignes considérées. L'expression, fort précise, laisse peu de place à l'interprétation, pour peu que l'on suive de près l'ordre du texte. Il ressort de l'emploi, en XII.29 et XII.30 du terme *prakalpya* (« ayant considéré mentalement »), de la même racine que *kalpanā* (imagination), que les figures étaient censées pouvoir être visualisées mentalement. La cohérence mathématique des résultats présentés dans le texte contraint également très fortement leur domaine d'applicabilité. La lecture attentive, en prenant en compte la cohérence mathématique du texte, nous permettra de déterminer ce qu'est le « triquadrilatère ». Pour une présentation systématique de la méthode que nous utilisons, voir Kichenassamy (2011), avec une autre application dans Kichenassamy (2006).

La situation est donc la suivante : Brahmagupta a obtenu des résultats originaux, mais semble ne pas les avoir exprimés de manière complète. Nous allons voir que cette impression provient de ce que ses présupposés mathématiques ne sont pas les mêmes que ceux de ses successeurs. Pour ce faire, nous allons d'abord passer en revue quelques notions et résultats connus de Brahmagupta (sect. III) puis, nous allons lire les Prop. XII.21–32 en tentant de suivre pas à pas la démarche suggérée par l'ordre et la formulation même de ses résultats. Nous insisterons ici sur la

⁵ Chasles, Hankel, Cantor, Zeuthen, Datta, Sarasvati Amma, parmi les principaux (voir Kichenassamy (2010) pour une discussion). Il existe de nombreuses dérivations des résultats de Brahmagupta par des méthodes modernes, mais toutes utilisent des outils inconnus de Brahmagupta.

détermination de la nature du « triquadrilatère », et la détermination de son aire et de ses diagonales, renvoyant aux références pour les autres aspects et résultats de son texte.

III. Quelques aspects des mathématiques de Brahmagupta.

Rappelons quelques points saillants de l'œuvre mathématique de Brahmagupta, en insistant plus particulièrement sur ceux qui seront pertinents pour la suite. D'abord, Brahmagupta traite, dans le Chap. XVIII, le zéro et les nombres négatifs—apparemment pour la première fois—comme des nombres, soumis à une règle des signes. Il présente également des méthodes de calcul sur des irrationnels quadratiques. Il possède une algèbre « littérale » (où les inconnues sont désignées par des lettres), qu'il utilise pour résoudre des équations de degrés un et deux. Il résout l'équation $ax + m = by + n$ en entiers, et jette les bases de la résolution de l'équation $Nx^2 + 1 = y^2$ en entiers, qui sera complétée par Jayadeva. Il donne en particulier l'« identité de Brahmagupta » (XVIII.65-66), qui permet de composer les solutions de $Nx^2 + k = y^2$:

$$\text{Si } Na^2 + k = b^2 \text{ et } Nc^2 + l = d^2, \text{ alors } N(ad + bc)^2 + kl = (Nac + bd)^2.$$

Brahmagupta utilise dans le chapitre XII une algèbre « rhétorique », où les opérations sont décrites en toutes lettres, sans symboles. Il dispose également d'une algèbre littérale, mais c'est dans le chapitre XVIII qu'il l'utilise, dans sa théorie des équations. Il n'y a donc pas d'inconvénient à transcrire, comme nous le ferons, ses formules en écriture moderne, pour la commodité du lecteur, tant que les opérations effectuées sont bien celles connues de Brahmagupta.

En géométrie, Brahmagupta utilise les concepts que l'on trouve dans des textes indiens antérieurs. Les plus pertinents pour la suite sont les suivants. Le triangle (*tribhuja*) est littéralement, un « trilatère », puisque la notion d'angle est absente ; ce que nous appelons un triangle rectangle est conçu ici comme un demi-oblong, dont l'hypoténuse est appelée *karṇa* (diagonale). Le carré de la diagonale d'un oblong est la somme des carrés de sa longueur et de sa largeur. Dans un triangle scalène (ou isocèle), on fixe l'un des côtés, que l'on appelle « base » ; la perpendiculaire abaissée sur la base divise le triangle en deux triangles rectangles. L'aire d'un oblong est le produit de ses côtés ; celle d'un triangle est le demi-produit de la base par la hauteur. Les considérations de symétrie par rapport à un axe « vertical » ou « horizontal » jouent un rôle important dans les questions liées aux ombres portées dans le chapitre XIX, tout comme une notion restreinte de similarité pour les triangles rectangles, que nous verrons décrite dans la Prop. XII.25.

IV. Analyse des propositions XII.21–XII.32.

IV.1. Orientation générale

XII.21 énonce la formule de Brahmagupta. XII.22–26 développent des outils utiles à sa dérivation. C'est XII.27 qui donne la clé de l'identification du triquadrilatère, et qui indique la dérivation de la formule de l'aire ; nous donnons celle-ci après l'analyse de XII.27. XII.28–32 tirent les conséquences de ces résultats. Pour chaque proposition, nous donnons le texte sanskrit, une traduction qui s'efforce de reproduire le mouvement du texte, et une analyse de son contenu.

Chaque numéro (21, 22, etc.) correspond à un vers, dont les hémistiches (inégaux) sont écrits sur deux lignes ; pour une définition rapide du vers employé et un exemple de scansion, voir Kichenassamy (2012b). En sanskrit mathématique comme en français mathématique, certaines opérations sont désignées par plusieurs termes dont on peut négliger les nuances en première approximation : ainsi, nous ajoutons ou additionnons des nombres, nous les multiplions ou effectuons le produit, nous retranchons ou soustrayons, etc.

Indications sur la prononciation : Le texte sanskrit est ici donné en translittération, en suivant les conventions usuelles.⁶ On retiendra que (i) les voyelles $\bar{a}$, $\bar{i}$, $\bar{u}$, o , e sont longues, a , i , u sont brèves ; u se prononce toujours « ou », jamais « u » ; e se prononce toujours « é » ; (ii) les consonnes $\dot{t}$, $\dot{d}$ et $\dot{n}$ sont « rétroflexes » ; (iii) c , r , $\dot{s}$ et $\acute{s}$ correspondent approximativement à tch , ri , sh et $\dot{\varsigma}$ respectivement ; (iv) h indique toujours une aspiration ; (v) les mots ne sont pas toujours séparés, et leur décomposition nécessite une connaissance de la grammaire sanskrite, dans laquelle la formation des composés est régie par des règles assez strictes. Des tirets ont été insérés pour matérialiser la limite de certains mots, ou la décomposition de certains composés.

IV.2. Prop. XII.21 : énoncé du résultat central

XII.21 *sthūlaphalam tricaturbhuja-bāhupratibāhu-yoga-dala-ghātaḥ*
bhujayogārdha-catuṣṭaya-bhujona-ghātāt padam sūkṣmam

Grossière valeur de l'aire d'un triquadrilatère
 Que le produit des demi-sommes des côtés opposés ;
 Du groupe formé de quatre demi-sommes des côtés
 Retranchant (chaque) côté (de l'une des demi-sommes), la racine du produit est l'affinée.

Brahmagupta commence par présenter deux façons d'évaluer l'aire du triquadrilatère : l'une grossière, l'autre « affinée ». Sa figure comporte quatre côtés, puisque la seconde formule en utilise quatre ; nous les noterons a , b , c , d , dans l'ordre de succession des côtés. Posant $s = (a + b + c + d)/2$, Brahmagupta affirme que l'aire A est donnée approximativement par

$$A \cong \frac{a + c}{2} \times \frac{b + d}{2},$$

et plus précisément par la célèbre expression

$$A = \sqrt{(s - a)(s - b)(s - c)(s - d)}.$$

Cette expression peut se comparer à la valeur approchée ; en effet,

⁶ Les caractères utilisés en Inde sont le plus souvent ceux de l'écriture dite « *nāgarī* » ou, dans le Sud, les caractères « *grantha* » et leurs variantes locales. On s'accorde à penser que toutes les écritures proprement indiennes dérivent de la *brāhmī* que l'on trouve dans les inscriptions d'Aśoka au troisième siècle avant J.-C. Les variations régionales sont extrêmement nombreuses. Voici le texte de XII.21 dans l'écriture *nāgarī* :

स्थूलफलं त्रिचतुर्भुजबाहुप्रतिबाहुयोगदलघातः । भुजयोगार्धचतुष्टयभुजोनघातात् पदं सूक्ष्मं ॥ २१ ॥

$$s - d = \frac{a + b + c - d}{2} = \frac{a + c}{2} + \frac{b - d}{2},$$

$$s - b = \frac{a - b + c + d}{2} = \frac{a + c}{2} - \frac{b - d}{2},$$

d'où

$$(s - b)(s - d) = \left[\left(\frac{a + c}{2} \right)^2 - \left(\frac{b - d}{2} \right)^2 \right] \leq \left(\frac{a + c}{2} \right)^2.$$

De même,

$$(s - a)(s - c) = \left[\left(\frac{b + d}{2} \right)^2 - \left(\frac{a - c}{2} \right)^2 \right] \leq \left(\frac{b + d}{2} \right)^2,$$

d'où il résulte que *la valeur grossière excède toujours la valeur exacte*. On remarque également que la valeur exacte ne dépend pas de l'ordre des côtés, contrairement à l'autre. Nous reviendrons sur ce point après la discussion de XII.27.

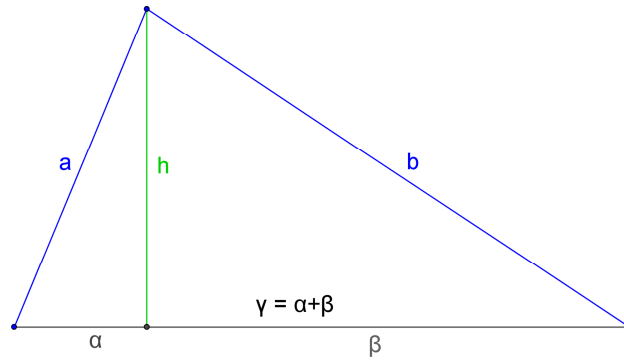


Figure 1. XII.22 : Triangle avec sa base, ses deux côtés et sa hauteur.

IV.3. Prop. XII.22–24 : relations dans le triangle et le trapèze isocèle

XII.22 : *bhuja-kṛty-antara-bhū-hṛta-hīna-yutā bhūr-dvibhājita''vādhe svāvādhā-vargonād bhujavargān-mūlam-avalambaḥ*

La base est diminuée ou augmentée

Du quotient, par la base, de la différence des carrés des côtés,

(Et le résultat) divisé par deux :

(Tels sont) les deux segments.

Ayant ôté le carré de son propre segment

Au carré d'un côté, la racine (du résultat) est la hauteur.

Il s'agit ici d'un trilatère, de côtés a , b , et de base γ et de hauteur h (voir Fig. 1). La hauteur coupe la base en deux segments, dont les longueurs sont données en termes des côtés par le premier hémistiche : $\alpha, \beta = \frac{1}{2} \left[\gamma \pm \frac{a^2 - b^2}{\gamma} \right]$. Le second en déduit la hauteur : $h = \sqrt{a^2 - \alpha^2} = \sqrt{b^2 - \beta^2}$.

Ces relations résultent immédiatement de la considération des deux triangles rectangles en lesquels la hauteur décompose le triangle donné, car on a $a^2 - b^2 = (\alpha^2 + h^2) - (\beta^2 + h^2) = \alpha^2 - \beta^2$ et, par ailleurs, $\gamma = \alpha + \beta$. Ces résultats prennent une forme plus simple si le triangle donné est rectangle en son sommet supérieur, comme le lecteur le vérifie aisément.

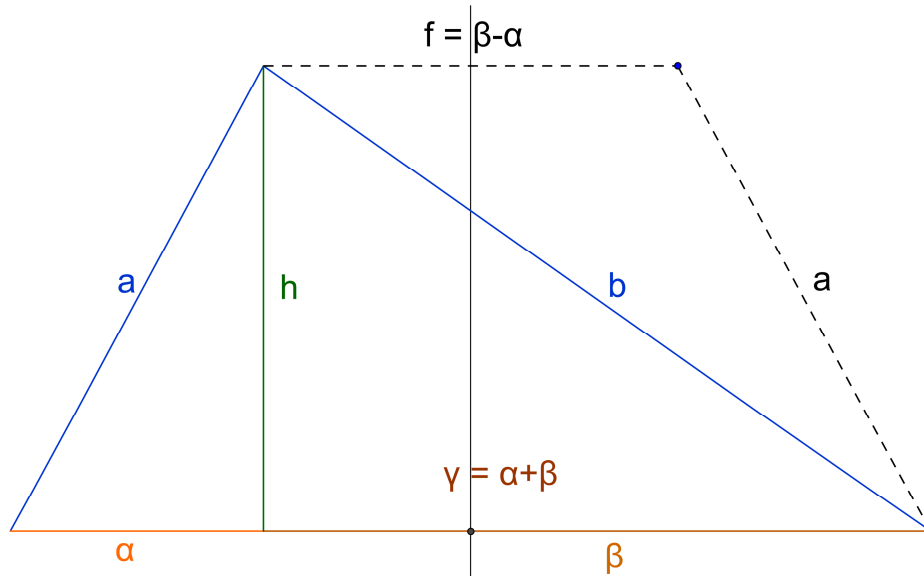


Figure 2. XII.23 : Trapèze isocèle associé au triangle par symétrie.

XII.23 *aviṣama-caturasra-bhujapratibhuja-vadhayor yuteḥ padaṃ karṇaḥ
karṇa-kṛtir-bhū-mukha-yuti-dala-vargonā padaṃ lambaḥ*

*Dans le quadrilatère sans dissymétrie,
La racine de la somme des deux produits des côtés opposés
Est la diagonale.
La racine du carré de la diagonale diminué
Du carré de la demi-somme de la base et de la face
Est la perpendiculaire*

Brahmagupta considère maintenant un quadrilatère « sans dissymétrie » associé au triangle précédent. Il s'agit du trapèze isocèle obtenu en complétant le triangle par symétrie (Fig. 2). Ce trapèze possède quatre côtés : a, f, a, γ , où la « face » f est le côté opposé à la base. Le côté b du triangle est maintenant une diagonale du trapèze. La double négation est inévitable : le « quadrilatère symétrique » désigne en sanskrit le carré. Brahmagupta obtient la diagonale et la perpendiculaire du trapèze en termes de ses côtés seulement :

$$b = \sqrt{a^2 + \gamma f}; \quad h = \sqrt{b^2 - \left(\frac{\gamma + f}{2}\right)^2}.$$

Ces résultats sont intimement liés aux précédents, car $\gamma = \alpha + \beta$ et $f = \beta - \alpha$. Il est néanmoins frappant de noter que le trapèze isocèle s'obtient également par symétrie à partir d'un triangle

dont l'un des angles à la base est obtus ; on a donc ici une façon élégante de traiter tous les types de triangle sans introduire de « cas de figure ».

XII.24 : *karṇakṛteḥ koṭikṛtiṃ viśodhya mūlam bhujo bhujaśya kṛtim
prohya padaṃ koṭiḥ koṭi-bāhu-kṛti-yuti-padaṃ karṇaḥ*

*Du carré de la diagonale ayant enlevé la longueur au carré,
La racine (de cette différence) est la largeur.
(Du carré de la diagonale) ayant retiré la largeur au carré,
La racine (de cette différence) est la longueur.
La racine de la somme des carrés de la longueur et de la largeur
Est la diagonale.*

Les termes que nous traduisons par « longueur » et « largeur » (*koṭi*, et *bāhu* ou *bhuja*) sont des termes techniques qui désignent toujours les deux côtés perpendiculaires d'un oblong, tout comme les termes « montant » et « linteau » impliquent un cadre rectangulaire (celui d'une porte) sans qu'il soit nécessaire d'en dire plus. Cette proposition énonce donc sous trois formes légèrement différentes que la somme des carrés des côtés d'un oblong donne le carré de sa diagonale—relation que Brahmagupta a déjà utilisé à plusieurs reprises. Il est absurde de penser qu'un auteur qui omet toute étape de calcul que le lecteur peut aisément suppléer se complaise à délayer son texte dans une formulation redondante. Il faut donc penser que XII.24 a une autre signification. Or, le texte n'est redondant que si l'on suppose que les trois relations qu'il décrit concernent le même oblong. D'ailleurs, rien ne dit même que l'auteur présente ici trois résultats indépendants. Considérons donc un triangle inscrit dans un cercle, dont la base est un diamètre. Avec les notations de la Fig. 1, appelant r le rayon du cercle, on peut y considérer trois types de triangles qui ont tous le côté h en commun : (i) (a, h, α) et (b, h, β) ; (ii) $(r, h, r-\alpha)$; (iii) (a, b, γ) . Effectuons maintenant les trois opérations prescrites par Brahmagupta, exactement comme il les indique. D'abord, on ôte le carré de la longueur (ici, de la hauteur) dans les triangles de type (i) :

$$\alpha = \sqrt{a^2 - h^2}; \quad \beta = \sqrt{b^2 - h^2}.$$

Ensuite, on ôte le carré de la largeur (ici, du côté) dans le triangle de type (ii), ce qui conduit à une expression de h^2 :

$$h^2 = r^2 - (r - \alpha)^2 = \alpha(2r - \alpha) = \alpha\beta.$$

On calcule maintenant le carré de la base :

$$\gamma^2 = (\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta = (a^2 - h^2) + (b^2 - h^2) + 2(h^2 - \alpha\beta) = a^2 + b^2.$$

Cette relation exprime la troisième relation de XII.24 ; elle montre que le triangle (iii) est rectangle. Ainsi, Brahmagupta n'a pas donné en XII.24 trois versions du même résultat. Les trois relations n'ont pas le même statut. Les deux premières relations décrivent la dérivation d'un théorème que la troisième énonce.

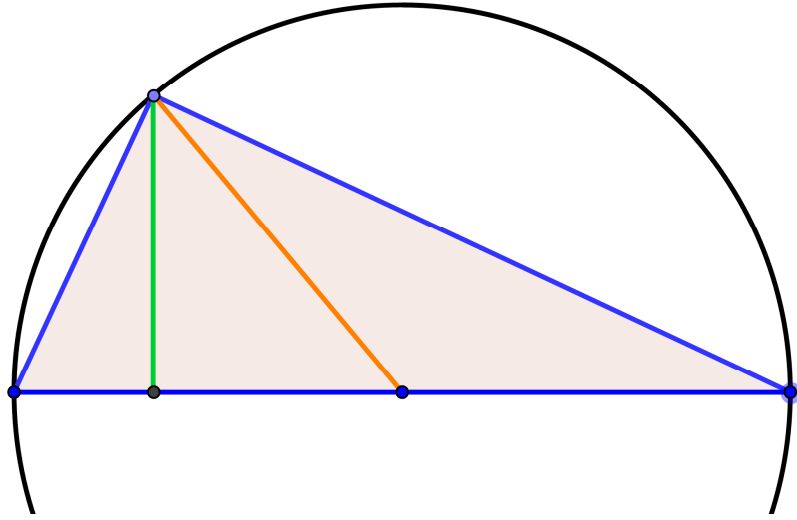


Figure 3. XII.24 : Le triangle a pour base un diamètre du cercle circonscrit ; sa hauteur est l'un des côtés de plusieurs triangles rectangles, limités par un côté, ou par un rayon.

IV.4. Prop. XII.25 : Détermination de toutes les lignes définies par les perpendiculaires et diagonales d'un trapèze isocèle

XII.25 : *karṇa-yutāv-ūrdhvādhara-khaṇḍe karṇāvalamba-yoge vā
svāvādhe svayuti-hṛte dvidhā prthak karṇa-lamba-guṇe*

*Lorsqu'une diagonale rencontre l'autre,
Les deux portions, inférieure et supérieure (limitées par cette intersection)
Ou celles (limitées par) là où diagonales et perpendiculaires se rejoignent*

*Sont chacune obtenue en multipliant séparément,
Par leurs propres segments divisés par leurs propres connexions,
La diagonale ou la hauteur (selon ce qu'on souhaite calculer).*

XII.25 explique comment déterminer toutes les lignes que les diagonales et les hauteurs déterminent, dans un trapèze isocèle, par leurs intersections mutuelles (Fig. 4). Pour décrire la méthode conduisant à toutes ces portions, Brahmagupta associe à chacune d'entre elles son « propre segment », qui est sa projection sur la base, et sa « propre connexion ». Celle-ci est la portion de la base qui joint le point de départ de la diagonale concernée au pied de la hauteur abaissée du point terminal de celle-ci (Fig. 5) ; c'est donc la projection de la diagonale complète sur la base. Dans ce cas particulier, longueur de la propre connexion n'est autre que le segment β déjà déterminé en XII.21 ; le fait que Brahmagupta utilise une terminologie spéciale montre qu'il donne ici un principe général :

$$\text{portion} = \text{ligne} \times \frac{\text{propre segment}}{\text{propre connexion}}.$$

Brahmagupta appelle cette méthode « *anupāta* » (proportion) en XII.32. On peut justifier cette relation à l'aide de considérations sur les aires, une approche classique en Inde à cette époque (voir Kichenassamy (2010) et (2012a)). Cette proportion géométrique ne se confond pas dans l'esprit de Brahmagupta avec la règle de trois (*trairāśika*) qu'il a présentée plus tôt dans le même chapitre.

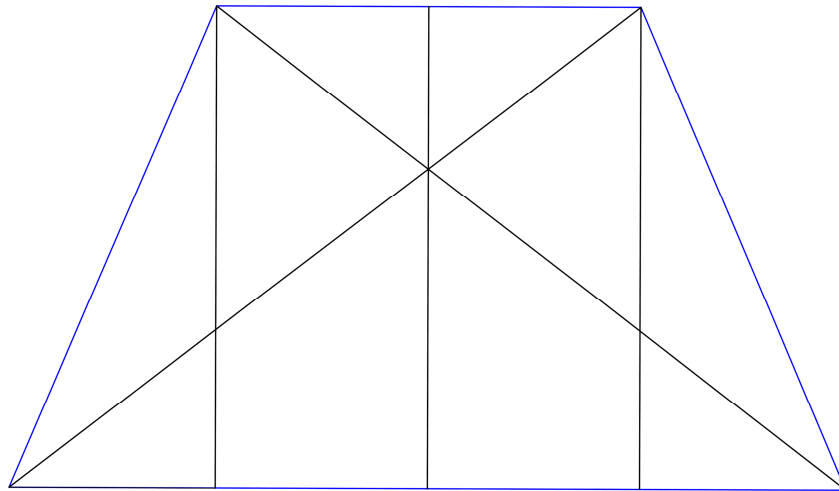


Figure 4. XII.25 : chaque diagonale coupe chacune des hauteurs, ainsi que l'autre diagonale, en deux portions.

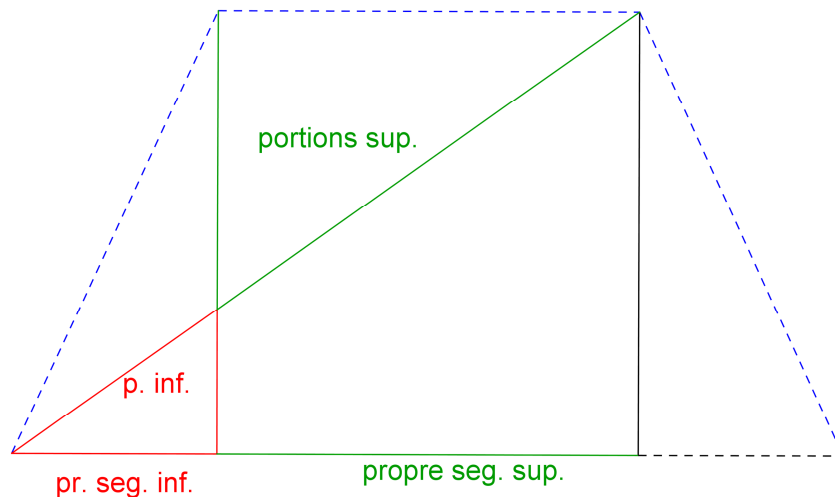


Figure 5. XII.25 : détermination des portions (supérieure et inférieure) de hauteur et de diagonale. Le « propre segment » d'une portion est sa projection sur la base ; la propre connexion est ici la projection de la diagonale entière.

IV.5. Prop. XII.26 : deux méthodes pour déterminer le rayon du cercle circonscrit

XII.26 *aviṣamapārsvabhujā-guṇaḥ karṇo dviguṇāvalamba-vibhaktaḥ
hrdayaṃ viṣamasya bhujapratibhujā-kṛti-yoga-mūlārdham*

*Le bras latéral de l'adissymétrie, multiplié par la diagonale,
Divisée par la perpendiculaire doublée,
C'est le (cordeau du) cœur, (lequel,)
Du dissymétrie, est la demi-racine
De la somme des côtés opposés carrés.*

Les propositions XII.26 et XII.27 sont consacrées à la détermination du rayon du cercle circonscrit r (le « cordeau du cœur »). XII.26 propose deux méthodes, présentées chacune dans un hémistiche.

La première s'appuie sur la considération du trapèze isocèle (« adissymétrie »), et donne, avec les notations de la Fig. 1,

$$r = \frac{ab}{2h}.$$

On considère ici le cas où le centre du cercle circonscrit est intérieur au trapèze ; les autres cas sont traités dans Kichenassamy (2010), auquel nous renvoyons également pour les détails des calculs. On voit que Brahmagupta formule ses résultats de façon à ce qu'ils s'appliquent également à tous les cas. Avec les notations de la Fig. 6, on remarque que la hauteur se décompose en deux portions, dont on connaît la somme, ainsi que la différence des carrés :

$$h_1 + h_2 = h; \quad h_2^2 - h_1^2 = \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 - \left(\frac{f}{2}\right)^2 = \alpha\beta.$$

On en tire les portions des hauteurs, puis le rayon grâce à la relation $h_1^2 + \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 = r^2$. On mentionne ici uniquement une expression de la portion inférieure de la hauteur, qui nous sera utile dans la dérivation de la formule XII.21 de l'aire du triquadrilatère :

$$4hh_1 = 2(h^2 - \alpha\beta) = a^2 + b^2 - \gamma^2. \quad (1)$$

Si le centre du cercle circonscrit est situé sous la base, on obtient par un raisonnement analogue

$$4hh_1 = \gamma^2 - a^2 - b^2. \quad (2)$$

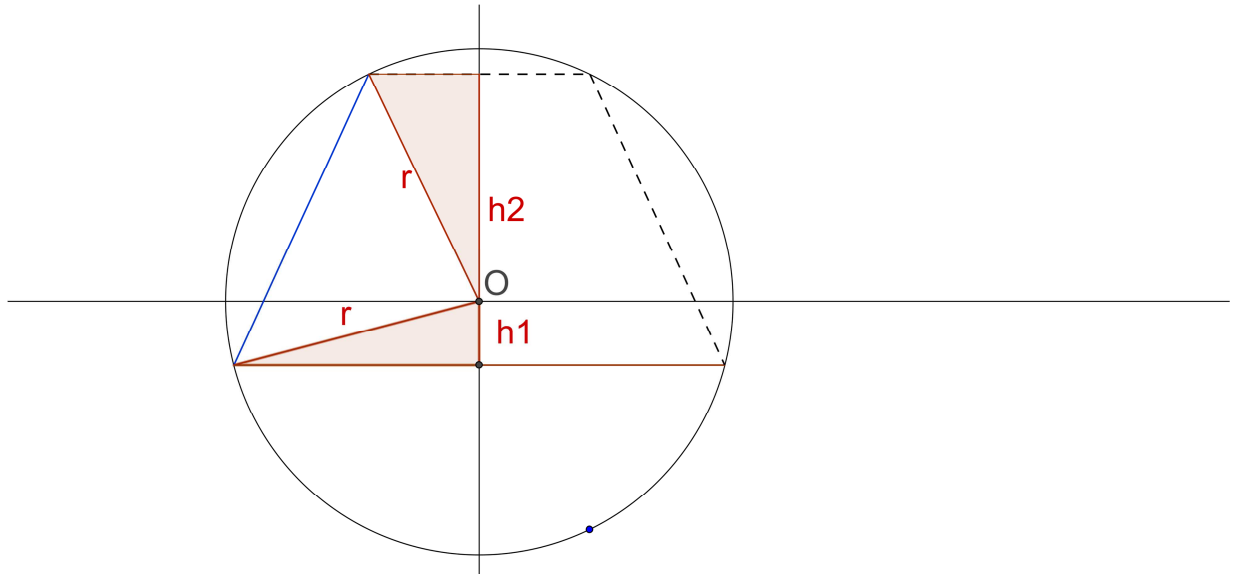


Figure 6. XII.26 : les triangles rectangles indiqués permettent de déterminer la distance de la base au centre du cercle circonscrit.

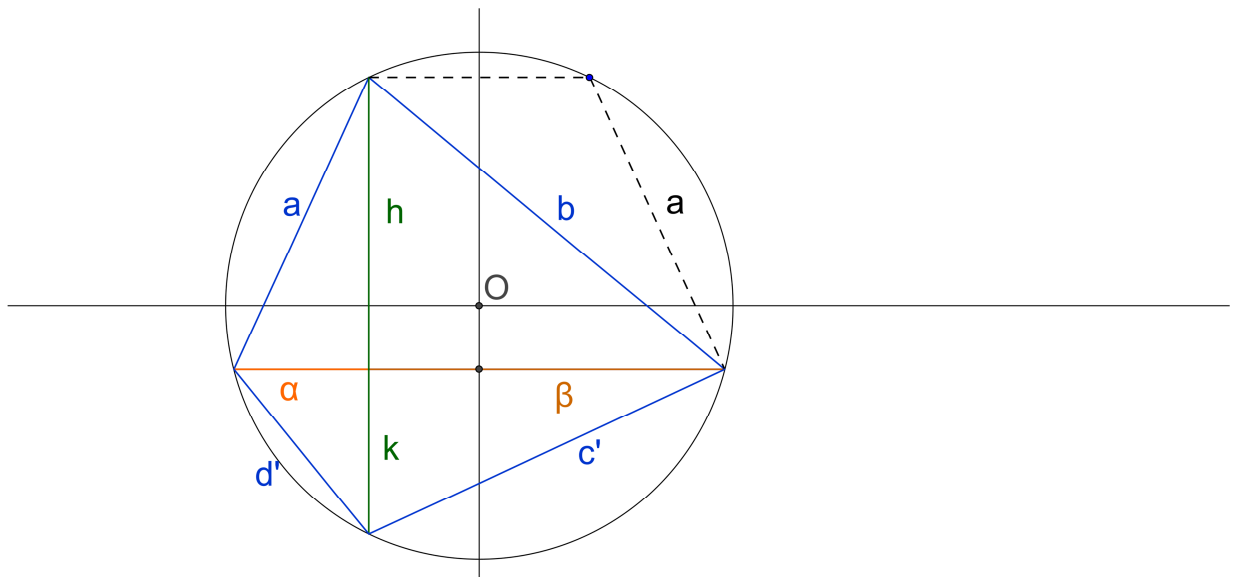


Figure 7. XII.26 : Détermination du rayon du cercle circonscrit à l'aide d'un quadrilatère dissymétrique

La seconde partie de XII.26 fournit une autre expression du rayon du cercle circonscrit, s'appuyant sur la considération du quadrilatère « asymétrique » associé au triangle, à savoir celui obtenu en prenant le symétrique du sommet du triangle par rapport au diamètre horizontal du cercle, voir Fig. 7 : il n'est donc pas symétrique par rapport à l'axe médial. Cette construction permet de mettre en évidence un triangle inscrit dont la base est un diamètre du cercle, et donc d'utiliser XII.24, voir Kichenassamy (2010). Le résultat final est, avec les notations de la Fig. 7,

$$r = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + c'^2} = \frac{1}{2} \sqrt{b^2 + d'^2}.$$

IV.6. La Prop. XII.27 détermine la nature du triquadrilatère

XII.27 *tribhujasya vadho bhujayor dviguṇita-lamboddhṛto hṛdayarajjuh
sā dviguṇā tricaturbhujakoṇa-sṛṅg-vṛtta-viṣkambhaḥ*

*Dans le trilatère, le produit des côtés
Divisé par la perpendiculaire doublée,
C'est le cordeau du cœur,
Lequel, doublé, est, dans le triquadrilatère
Le diamètre du cercle au contact de ses coins.*

Cette proposition décrit le rayon du cercle circonscrit à un triangle et celui circonscrit à un triquadrilatère. Cette proposition est, avec XII.21, semble-t-il le seul endroit dans le corpus sanskrit où ce terme intervienne, exception faite des citations du texte de Brahmagupta par d'autres auteurs. Elle va nous permettre de déterminer ce qu'est le triquadrilatère.

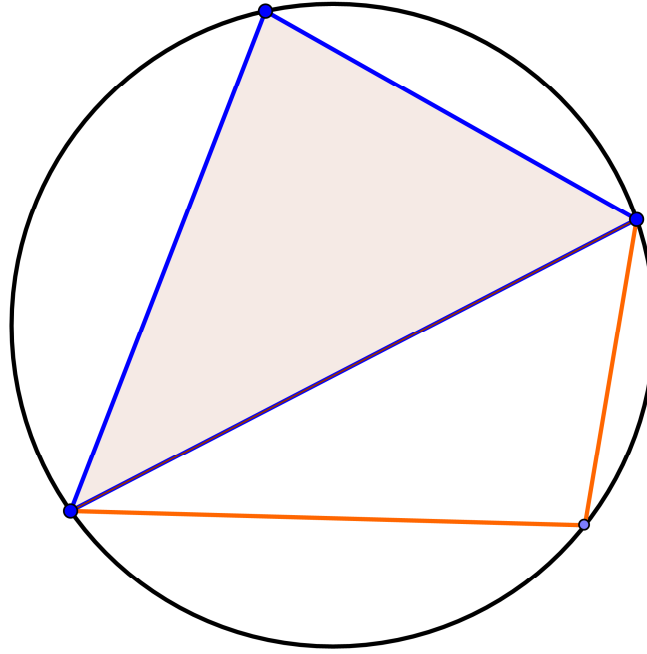


Figure 8. Le triquadrilatère. Il est obtenu en complétant un triangle par l'addition d'un quatrième sommet pris sur le cercle circonscrit au triangle.

Ce texte montre d'abord clairement que le triquadrilatère est inscrit dans un cercle. Ensuite, son cercle circonscrit coïncide avec celui d'un certain triangle. Nous en concluons que le triquadrilatère qui, d'après XII.21, possède quatre côtés, contient un triangle distingué. La base de ce triangle est alors l'une des diagonales du quadrilatère formé par les quatre côtés. Nous voyons donc que le triquadrilatère consiste en un triangle complété par l'addition d'un quatrième sommet sur le cercle circonscrit au triangle (Fig. 8). On peut également le voir comme un

quadrilatère inscriptible dans un cercle, dont on connaît une diagonale. Cette interprétation est conforme à la grammaire sanskrite (P.-S. Filliozat).

Maintenant que nous savons que le triquadrilatère est inscrit dans un cercle, nous pouvons voir pourquoi son aire est nécessairement une fonction symétrique de ses côtés. En effet, on peut obtenir cette aire en retranchant de celle du disque quatre « segments de cercle » (en sanskrit, *pradhi* ; voir Fig. 9). L'aire de chacun de ces segments ne dépend que d'un seul côté, et l'ordre dans lequel on les retranche importe peu. L'aire du quadrilatère ne dépend donc pas de l'ordre des côtés. En contrastant en XII.21 la formule exacte et la formule approchée, Brahmagupta attire l'attention du lecteur sur la plus grande symétrie de la formule exacte. Il l'encourage également à faire usage de cette symétrie, qui est utile dans la dérivation de l'expression des diagonales (XII.28).

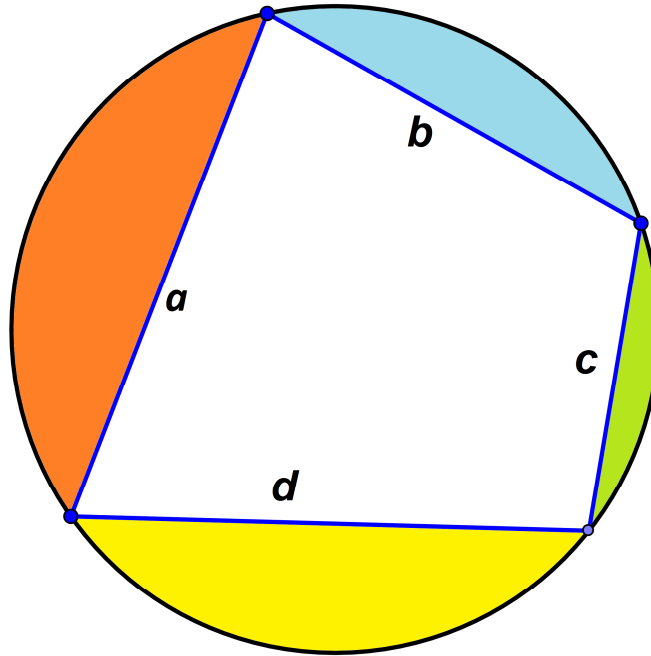


Figure 9. L'aire du quadrilatère cyclique s'obtient en retranchant de celle du disque quatre segments de cercle (en couleurs), dont chacun ne dépend que d'un seul côté.

IV.7. Dérivation de l'aire du triquadrilatère

Nous disposons maintenant des éléments de la dérivation de la formule de Brahmagupta énoncée en XII.21. Pour obtenir l'aire du triquadrilatère, décomposons-le en deux triangles, comme sur la Fig. 10 dont nous utilisons les notations. Ces deux triangles ont le même cercle circonscrit. On a donc, par XII.27, $ab = 2h$ et $cd = 2rh'$, d'où

$$ab + cd = 2r(h + h'). \quad (3)$$

Par ailleurs, le centre du cercle circonscrit à chacun de ces triangles est également le même, ce

qui fait que la distance h_1 du centre à la base de ces triangles est la même. Nous avons vu, dans la discussion de XII.26, que l'on pouvait l'exprimer à l'aide des côtés de ces triangles (équ. (1) et (2)). On obtient alors $a^2 + b^2 = \gamma^2 + 4hh_1$; $c^2 + d^2 = \gamma^2 - 4h'h_1$.
Il en résulte que

$$a^2 + b^2 - c^2 - d^2 = 4h_1(h + h'). \quad (4)$$

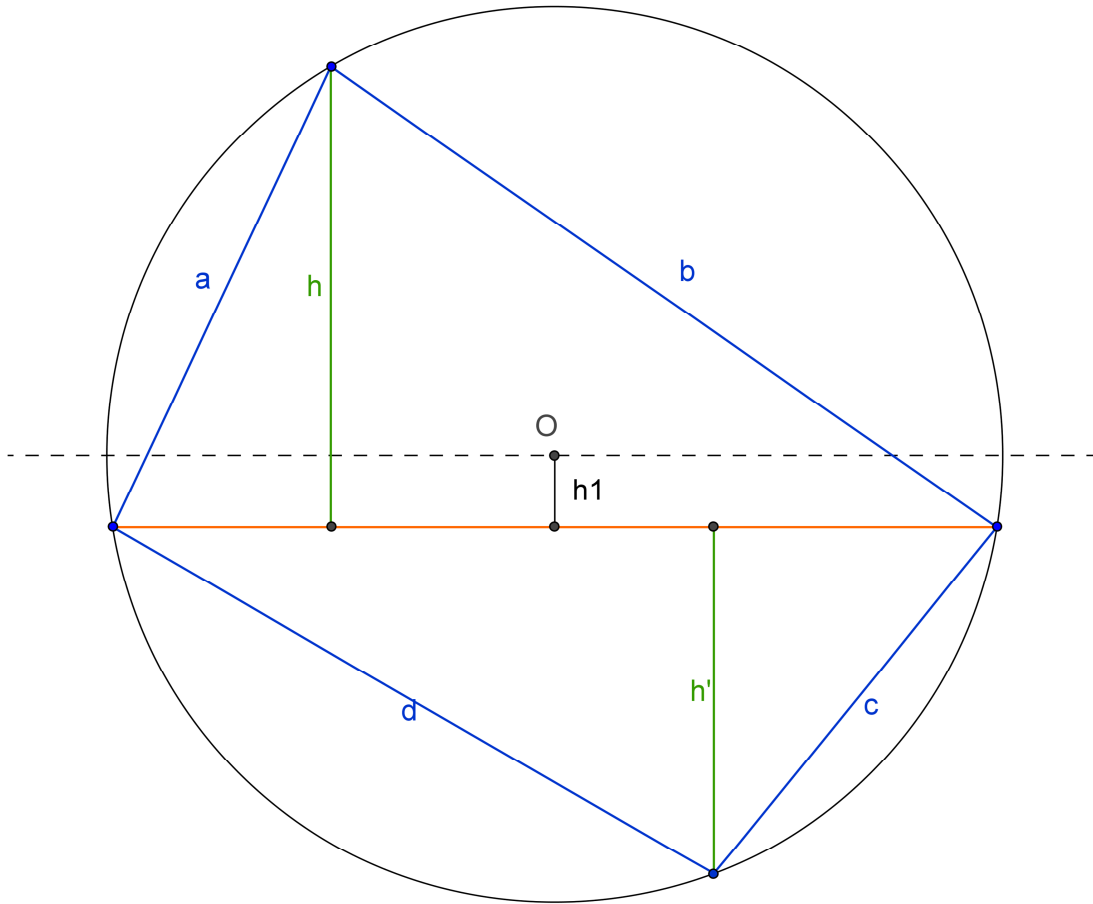


Figure 10. Dérivation de l'aire du triquadrilatère.

Mais l'aire du triquadrilatère est la somme des aires des deux triangles : $A = \frac{1}{2}\gamma(h + h')$. Comme nous avons déjà vu que $\left(\frac{1}{2}\gamma\right)^2 + h_1^2 = r^2$, il résulte de (3) et (4) que

$$16 A^2 = 4(ab + cd)^2 - (a^2 + b^2 - c^2 - d^2). \quad (5)$$

En utilisant deux fois l'identité $u^2 - v^2 = (u - v)(u + v)$, on obtient

$$\begin{aligned}
16 A^2 &= (a^2 + b^2 + 2ab - c^2 - d^2 + 2cd)(c^2 + d^2 + 2cd - a^2 - b^2 + 2ab) \\
&= (a + b + c - d)(a + b - c + d)(c + d + a - b)(c + d - a + b) \\
&= 16(s - a)(s - b)(s - c)(s - d),
\end{aligned}$$

en notant s le demi-périmètre du quadrilatère. La formule énoncée en XII.21 en résulte. Ainsi, Brahmagupta a donné tous les outils pour permettre de dériver son résultat, pour peu qu'on le suive dans sa démarche.

La proposition suivante utilise cette formule de l'aire pour déterminer les diagonales en termes des côtés.

IV.8. Prop. XII.28 : détermination des diagonales

XII.28 *karṇāsrita-bhuja-ghātaikyam ubhayathā'nyonya-bhājitaṁ-guṇayet
yogena bhujapratibhuja-vadhayoḥ karṇau pade viṣame*

*Les sommes des produits des côtés qui adhèrent à (chaque) diagonale
Divisées l'une par l'autre, des deux manières, seront multipliées
Par la somme des produits des côtés opposés.
Les deux diagonales (en) sont les racines, dans le dissymétrique*

En symboles, cette proposition exprime que les deux diagonales sont données par

$$\gamma = \sqrt{\left(\frac{ad + bc}{ab + cd}\right)(ac + bd)} \quad \text{et} \quad \delta = \sqrt{\left(\frac{ab + cd}{ad + bc}\right)(ac + bd)}.$$

La détermination des diagonales s'effectue en deux étapes (on utilisera les notations de la Fig. 11).

Etape 1: calcul de γ/δ : On rappelle d'abord

$$A = \frac{1}{2}\gamma(h + h') \tag{5}$$

et, par (3), $ab + cd = 2r(h + h')$. On a donc $A = \frac{\gamma}{4r}(ab + cd)$ et, par un calcul analogue, $A = \frac{\delta}{4r}(ad + bc)$, d'où

$$\frac{\gamma}{\delta} = \frac{ad + bc}{ab + cd}.$$

Etape 2: calcul de $\gamma\delta$: On intervertit a et d dans (5), ce qui donne

$$4(ac + bd)^2 = 16 A^2 + (b^2 - a^2 + d^2 - c^2)^2. \tag{6}$$

Le triangle supérieur et le triangle inférieur ont chacun deux segments ; soit θ l'écart entre les pieds des hauteurs de ces triangles (voir Fig. 11). On a alors

$$\alpha + \theta = \alpha', \quad \beta' + \theta = \beta.$$

Par XII.22, $b^2 - a^2 = \gamma(\beta - \alpha)$, $d^2 - c^2 = \gamma(\alpha' - \beta')$, d'où

$$b^2 - a^2 + d^2 - c^2 = 2\gamma\theta. \quad (7)$$

Par ailleurs, la diagonale δ est l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont les côtés sont la somme des hauteurs, et l'intervalle entre ces hauteurs (voir Fig. 11) :

$$\delta^2 = \theta^2 + (h + h')^2. \quad (8)$$

Il vient, en appliquant (6), puis (5) et (7), et enfin (8),

$$\begin{aligned} 4(ac + bd)^2 &= 16A^2 + (b^2 - a^2 + d^2 - c^2)^2 \\ &= 4\gamma^2[(h + h')^2 + \theta^2] = 4\gamma^2\delta^2. \end{aligned}$$

D'où $\gamma\delta = ac + bd$.

On en tire $\gamma^2 = (\gamma\delta) \times \left(\frac{\gamma}{\delta}\right)$.

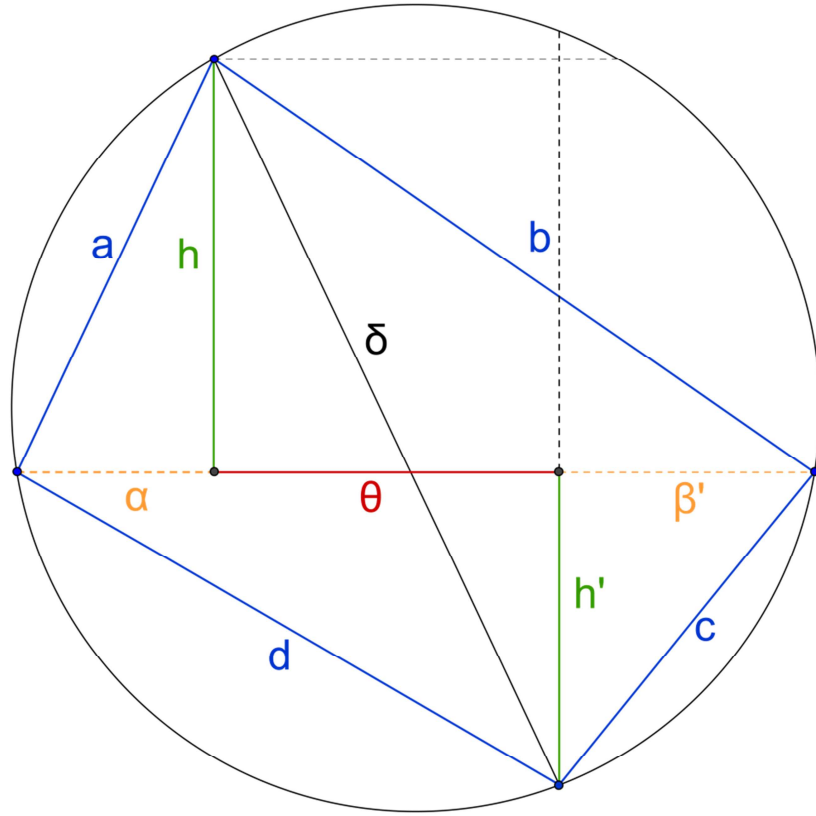


Figure 11. XII.28 : détermination de la diagonale δ .

Brahmagupta, après avoir déterminé les diagonales du triquadrilatère, va montrer comment déterminer les perpendiculaires abaissées sur la base à partir des sommets (XII.29), puis va déterminer celle abaissée du point de concours des diagonales, d'abord dans le cas où les diagonales sont perpendiculaires (XII.30–31), puis dans le cas général, pour lequel il introduit des constructions auxiliaires (XII.32). On obtient ainsi toutes les lignes de la Fig. 14, dans le cas général. Rappelons que Brahmagupta avait déjà obtenu toutes les portions de hauteurs et de

perpendiculaire dans le cas du trapèze isocèle en XII.25. La discussion sortant du cadre de cet exposé, nous donnons ici le texte avec un bref commentaire, renvoyant à Kichenassamy (2012a) pour une étude détaillée.

Après avoir déterminé les diagonales, Brahmagupta considère les perpendiculaires abaissées des sommets (XII.29). Il va ensuite déterminer systématiquement toutes les lignes que l'on peut obtenir par intersections de perpendiculaires et de diagonales (XII.30–32).

IV.9. Prop. XII.29–32 : Détermination des portions des diagonales et perpendiculaires.

XII.29 *viṣamacaturasra-madhye viṣama-tribhuja-dvayaṃ prakalpya pṛthak
karṇa-dvayena pūrvavad-āvādhe lambakau ca pṛthak*

*Dans le quadrilatère dissymétrique,
Imaginer deux trilatères dissymétriques, séparément,
(Déterminés) par la paire de diagonales, comme auparavant,
(On obtient) les deux segments, et les deux perpendiculaires, séparément.*

Brahmagupta considère ici deux triangles inclus dans le quadrilatère, ayant pour base commune la base du quadrilatère. Il note que l'on peut en déterminer chacune des perpendiculaires « comme avant », en appliquant XII.22. Lorsqu'on effectue le calcul suggéré par Brahmagupta, on trouve que les hauteurs s'expriment de façon simple en termes de l'aire si l'on utilise sa formule (XII.21).

On considère maintenant XII.30 et XII.31, qui forment une proposition unique.

XII.30 *viṣamabhujāntas-tribhuje prakalpya karṇau bhuvau tad-āvādhe
pṛthag ūrdhvādhara-khaṇḍe karṇa-yutau karṇayor-adhare*

XII.31 *tribhuje bhujau tu bhūmis tal-lambo lambakādharaṃ khaṇḍam
ūrdhvam-avalamba-khaṇḍam lambaka-yogārdham-adharonam*

*Entre les bras du dissymétrique, deux trilatères
Basés sur les diagonales sont considérés, dont les deux segments
Sont chacune une portion de diagonale,
Au-dessus, en-dessous de leur intersection. Sous les diagonales,*

*Dans le triangle (limité par les diagonales), ce sont en revanche les deux côtés ;
Sa hauteur est la partie inférieure de la hauteur (médiane) ;
La partie supérieure
Est la demi-somme des hauteurs moins la (partie) inférieure*

XII.30–31 décrit le « théorème de Brahmagupta » sur la perpendiculaire d'un quadrilatère cyclique à diagonales perpendiculaires (Fig. 12). On observe que la condition de perpendicularité est exprimée par l'identité des segments et des portions de diagonale (Fig. 13).

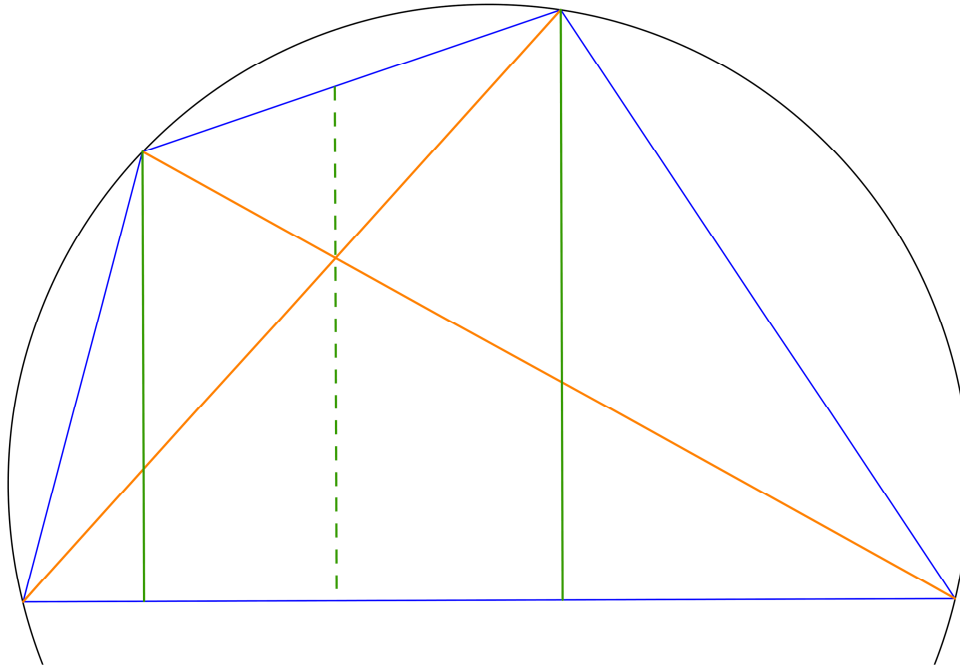


Figure 12. Le « théorème de Brahmagupta » : la perpendiculaire passant par le point de concours des diagonales (en pointillé) est la demi-somme des perpendiculaires abaissées des sommets supérieurs (en traits pleins).

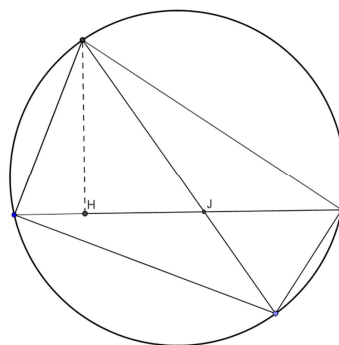


Figure 13. XII.30–31 : Les portions de diagonale sont également des segments lorsque les points J et H coïncident, ce qui signifie que les diagonales sont perpendiculaires.

XII.32 *karṇāvalambaka-yutau khaṇḍe karṇāvalambayor-adhare
anupātena tadūne ūrdhve sūcyāṃ sapāṭāyām*

Lorsque diagonale(s) et perpendiculaire(s) se rencontrent
Les portions inférieures de diagonale et de perpendiculaire
(Se déterminent) par proportion ; les retranchant,
On obtient les supérieures dans l'aiguille avec (la figure avec) intersections

L'aiguille est la figure obtenue en prolongeant deux côtés opposés jusqu'à leur intersection. La « figure avec intersections » est obtenue en prolongeant encore plus loin ces côtés, jusqu'à leur intersection avec les perpendiculaires élevées depuis les extrémités de la base (voir Fig. 15) ; elles rencontrent alors également les diagonales prolongées. Toutes les intersections mutuelles des lignes de cette figure définissent des portions ; Brahmagupta explique que toutes les portions inférieures de ces lignes peuvent s'obtenir par proportion (au sens de XII.25). De fait, la considération de ces figures auxiliaires permet une détermination élégante de la perpendiculaire passant par le point de concours des diagonales, une information qui n'est pas une conséquence immédiate des résultats précédents (voir Kichenassamy (2012a)).

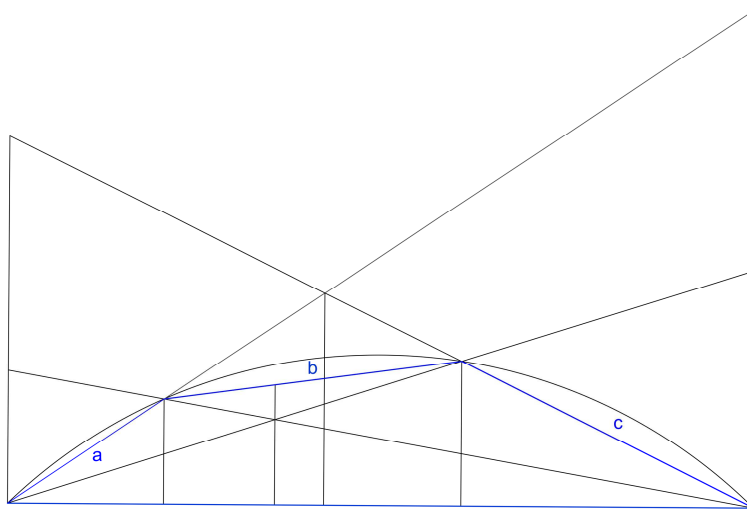


Figure 14. XII.32 permet de déterminer toutes les lignes de cette figure.

V. Conclusion

L'analyse du texte de Brahmagupta a ainsi permis de déceler sa cohérence. On a ainsi montré que Brahmagupta avait donné tous les éléments pour préciser le sens du terme « triquadrilatère », et que l'organisation de son discours contenait des indications permettant d'obtenir des dérivations de tous ses résultats, en n'utilisant que les outils à sa disposition. Les principes sous-jacents à cette analyse ont une portée plus vaste. L'étude d'un texte mathématique relève de la philologie, de la critique littéraire, et des mathématiques. De la philologie, elle tire l'exigence de se limiter à la lettre du texte : seul le texte compte, au mot près, à la lettre près. Les commentaires ultérieurs en particulier ne sont que des indications, des suggestions : ils ne doivent pas prendre le pas sur le

texte. De la critique littéraire, elle retient l'attention à la forme du texte : celle-ci est indissociable du contenu ; plus encore, elle lui donne une couleur, une orientation qui, comme ici, permet de déterminer le sens du texte. Enfin, il s'agit ici d'un texte scientifique : il faut garder à l'esprit la nécessaire cohérence mathématique du contenu. Comme on le voit, il s'agit là de remarques de bon sens : Qui songerait à dire que, pour comprendre un auteur, on doit s'adresser à ses épigones ? Qui pourrait penser que la façon dont on présente un argument importe peu ? Qui pourrait penser qu'un texte mathématique doit être abordé en oubliant sa dimension mathématique ?⁷

Références

Chasles, M., 1837. *Aperçu Historique sur l'Origine et le Développement des Méthodes en Géométrie*. Bruxelles: M. Hayez. Réimpression : Sceaux: J. Gabay, 1989.

Colebrooke, H. T., 1817. *Algebra, with Arithmetic and Mensuration, from the Sanskrit of Brahmagupta and Bhāscara*. London: J. Murray. Réimpression : Classics of Indian Mathematics, with a foreword by S.R. Sarma. Sharada Publishing House, Delhi, 2005.

Dvivedin, S., 1902. *Brāhmasphuṭa Siddhānta and Dhyānagrahopadeśādhyāya of Brahmagupta*. Benares.

Kichenassamy, S., 2006. Baudhāyana's rule for the quadrature of the circle. *Historia Mathematica*, 33(2), pp. 149-183.

Kichenassamy, S., 2010. Brahmagupta's derivation of the area of a cyclic quadrilateral. *Historia Mathematica*, 37(1), pp. 28-61.

Kichenassamy, S., 2011. Textual analysis of Ancient Indian Mathematics. *Gaṇita Bhāratī*, 33(1–2) (2011), 15–28.

Kichenassamy, S., 2012a. Brahmagupta's propositions on the perpendiculars of cyclic quadrilaterals. *Historia Mathematica*, 39(4), pp. 387-404.

Kichenassamy, S., 2012b. L'analyse littéraire au service de l'Histoire des Mathématiques : Critique interne de la Géométrie de Brahmagupta. *Comptes-Rendus des Séances de l'Académie des Inscriptions et Belles-Lettres, CRAI* 2012, II (avril-juin), pp. 781–796.

Sharma, R. S. (Chief Ed.), 1966. *Brāhma-Sphuṭa Siddhānta, with Vāsanā, Vijñāna and Hindi Commentaries*. New Delhi: Indian Institute of Astronomical and Sanskrit Research.

⁷ Pour une discussion plus détaillée des questions de méthode dans l'étude des textes mathématiques, voir Kichenassamy (2011, 2012b).