ALBERT GIRARD ET LE THEOREME FONDAMENTAL DE L'ALGEBRE

Frédéric Métin, IREM de Dijon
& université de Bourgogne / ESPÉ

Les mathématiciens talentueux qui ne sont plus connus que par le nom d'un théorème sont légion ; il y en a même comme Pythagore ou Al-Kashi à qui l'on attribue des résultats qui ne leur appartiennent pas, alors qu'on ignore souvent le contenu de leurs vraies recherches et l'importance qu'elles ont pour l'histoire des mathématiques. Parmi tous ceux-ci, peu sont ceux dont l'on connaît la vie, même en partie : pour un Blaise Pascal dont on sait jusqu'au jour de la naissance puisqu'il était « de bonne famille », il y a dix obscurs professeurs, militaires, jésuites dont on ne connaît qu'à peu près l'époque de la mort. Même la vie d'un grand scientifique comme Roberval présente quelques zones d'ombres, et nous ne parlons même pas des scientifiques d'époques plus anciennes.

Nous avons le même problème au sujet d'Albert Girard, qui n'a pas eu la chance de naître dans une famille noble, ni d'occuper un poste en vue dans l'armée, les autres institutions royales ou l'église. Son nom reste attaché à de grandes traductions (Stevin, Diophante, Marolois…) et surtout à un livre, l'*Invention nouvelle en l'algèbre* publié en 1629 en Hollande[1] et qui contient une des premières formulations exactes du théorème fondamental de l'algèbre. Mais les contemporains de Girard ne sont que peu nombreux à pouvoir mesurer l'importance de ce texte, et il finira respecté mais sans gloire, quelques années avant l'avènement des mathématiques cartésiennes.

À LA RECHERCHE D'ALBERT GIRARD

Au début du XVII^e^ siècle, les mathématiques n'avaient pas encore le rôle essentiel qu'elles joueront plus tard dans la société : peu d'universités et de collèges en proposent l'étude (hormis les *Éléments* d'Euclide), pas encore d'Académie pour offrir des situations stables à des chercheurs, peu de mécènes intéressés par d'autres sciences que celles qui ont rapport à l'astrologie ou celles dont les résultats sont spectaculaires. C'est sans doute l'une des raisons pour lesquelles la biographie d'Albert Girard est plutôt lacunaire ; mais surtout, il a consacré beaucoup de son temps au service d'autres auteurs, au détriment de son propre traité dont la lecture en est rendue plutôt difficile. Qu'obtenons-nous si nous partons à la recherche d'Albert Girard dans les textes eux-mêmes ?

GIRARD VU PAR LUI-MEME

C'est bien sûr le texte des *Œuvres complètes* de Simon Stevin[2] qui retiendra d'abord notre attention, car il s'agit du texte le plus diffusé et le plus célèbre impliquant notre auteur, celui qui a permis à ses premiers biographes du XIX^e^ siècle d'estimer (de manière erronée…) sa date de décès. En effet, la préface *A Tres-hauts & Tres-puissants Seigneurs Messeigneurs les*

[1] Pour les références exactes, voir la bibliographie en annexe.
[2] *Les Œuvres mathématiques de Simon Stevin de Bruges etc*. Leyde, Bonaventure & Abraham Elsevier, 1634.

Estats generaux de Pais Bas unis & A Tres-haut & Tres-illustre Prince, Monseigneur le Prince D'Aurenge, Gouverneur desdites Provinces, General par Mer & par Terre, &c. a été rédigée par la veuve d'Albert Girard, qui écrit[3] :

> *Messeigneurs, Voici une pauvre vesve avec onze enfans orphelins, ausquels le mari & pere, decedé il y a un an, n'a laissé qu'une bonne reputation davoir fidelement servi, & employé tout son temps a la reverche des plus beaux secrets des Mathematiques ; ayant esté ravi lorsqu'il projettoit d'en laisser quelques monuments, utiles a la posterité, & de sa propre invention lesquels il eust luy mesme apporté aux pieds de vos Seigneuries Tres-illuftres, si Dieu luy eut donné le loisir de les parachever. Mais en ayant disposé autrement, il ne nous en reste rien de complet, que la version des* Œuvres *du feu sieur Stevin, ausquelles il a adjousté plusieurs beaux esclarcissemens, comme pourront cognoistre ceux qui confereront les originaux avec sa traduction, qui luy a cousté beaucoup de temps & de peine* […]

L'auteure de la préface signe : *Les Tres-humbles & Tres-obeissans subjets serviteurs & servante, la vesve & les enfants orphelins de feu* ALBERT GIRARD. Comme le livre a été publié en 1634, les biographes en ont d'abord déduit que le mathématicien était mort en 1633. Cependant, Constantin Huygens (le père de Christian) note dans son Journal[4] à la date du 9 décembre 1632 qu'il déplore la perte de Girard, dont il écrivait déjà en décembre 1629 qu'il était un homme extraordinaire (*vir stupendus*).

Les commentaires de Girard dans le même livre nous donnent de nombreuses indications sur son état d'esprit, tantôt pointilleux, tantôt bienveillant, souvent pressé par le temps, assez fier de ses travaux mais toujours à la recherche de reconnaissance et de soutien financier. Par exemple, dans le traité de géographie, lorsque Stevin, dans un long prologue sur le « renouvellement du siècle sage », évoque la théorie musicale, Girard précise : *L'autheur n'a pas tenu sa promesse en cecy, je croy que la cause, est qu'il n'a pas eu le temps ; pour à quoy remedier j'espère en faire un traité particulier au plustost : estant de la mesme opinion que luy en cela*[5]. La question de l'urgence n'est peut-être pas qu'une projection du commentateur, car Stevin, comme quartier-maître général des armées du Prince de Nassau, ne disposait sûrement pas d'autant de temps qu'il lui aurait été nécessaire pour peaufiner ses écrits mathématiques. Dans la *Statique*, le jugement de Girard n'est pas toujours très tendre, il ne manque pas une occasion de souligner les failles du texte qu'il commente et de mettre en avant ses projets d'écriture ; après le prologue du troisième livre : *je montreray comment il faut vuider ceste question une autre fois au livre du mouvement que je pretends mettre bien tost au jour*.[6] Dans le chapitre sur l'usage du cric :

> *Stevin est un peu obscur au commencement de cet article-cy lorsqu'il veut declarer par parenthese, que c'est bien par puissance & non par effect, &c. Je proteste, sauf son honneur, qu'il estoit bien en peine lorsqu'il escrivoit cela ; car il maintient un (sic) erreur : nonobstant je veux croire que cela s'est fait sans qu'il sceut d'où venoit la*

[3] Simon Stevin, *Les Œuvres mathématiques…*, *op. cit.*, page signée ✻3.
[4] *Dagboek van Constantijn Huygens… [1606 - 1685]*, Amsterdam, 1885.
[5] Simon Stevin, *Les Œuvres mathématiques…*, *op. cit.*, deuxième volume *Cosmographie*, deuxième partie *Géographie*, p. 113.
[6] *Id.*, quatrième volume *L'art pondéraire ou la Statique*, troisième livre *Statique practique*, p. 469.

cause […] *On pourra voir comment, en quelle forme, & de quel nombre on pourra faire les dents des vigoureux roüages en mes Mechaniques ; car il y a une raison, une consideration & une invention non vulgaire sur ce subject, mais estant icy en pays estrange, sans Mœcenas, & non sans pertes, avec une grande famille, je n'ay pas le loisir, ny le pouvoir d'escrire icy tout ce qui y pourroit estre convenable*.[7]

La préface, citée plus haut, de la veuve d'Albert Girard s'en trouve confirmée : la famille, nombreuse, ne vivait pas sur un grand pied car Girard n'avait pas trouvé de position stable et s'était consacré à ses travaux ; l'étendue de ceux-ci se trouve encore augmentée si l'on considère cet autre extrait dans lequel il est question d'Euclide : *Mais il est à estimer qu'il en a plus escrit en ses trois livres des Porismes qui sont perdus, lesquels, Dieu aidant, j'espere de mettre en lumiere, les ayant inventez de nouveau.*[8] De même un peu plus loin dans le livre de la Statique formule-t-il ce vœu : *Pour satisfaire à ma promesse qui precede le dernier corollaire, & n'ayant pas le loisir toutefois de mettre icy la copie de ma demonstration entiere, je la donneray un autre fois au public, avec mes autres œuvres, moyennant l'aide de Dieu, lors que la recerche des sciences sera plus recommandable, qu'elle n'est à present.*[9]

On voit bien que l'auteur des commentaires se présente comme un inventeur et éditeur de textes d'autres personnes, il se dit intéressé par tout ce qu'il ne trouve pas dans le texte de Stevin qu'il commente. Les conditions matérielles qu'il décrit servent surtout à justifier la non-publication de ses propres travaux, mais nous verrons aussi que les deux textes qu'il a publiés à la fin des années 20 n'ont sans doute pas été des succès d'édition, surtout lorsqu'on se penche sur l'*Invention nouvelle*, si mal mis en page et jamais republié avant le XIX^e^ siècle.

Une autre explication possible, mais hasardeuse, tient au caractère même de l'homme ; on constate en effet qu'il peut avoir la dent très dure, lorsqu'il s'explique longuement sur les raisons qui l'ont conduit à republier les *Œuvres* de Samuel Marolois :

> […] *j'aye envie de prouver que le nombre des Mathematiciens n'est en si grande abondance que Honorat du Meynier pense en ses pauvres Paradoxes n'agueres divulguées, où il montre assez qu'il n'en a pas encore veu un, puisqu'il veut soustenir que la science n'apporte rien davantage, que ce que l'experience produit sans icelle ;* […] *& ce principe general qu'il appelle paradoxe en plurier*[10]*, estant de trop basse condition, ne pourroit avorter que des petits paradoxes semblables à luy pour faire finalement revenir l'opinion de la secte ridicule des Pyrrhoniens ; mais n'estant icy le lieu pour refuter & faire cesser ces faiseurs de grands tintamarres, je le laisseray estomaquer contre ceux qu'il nomme à trot & à travers Mathematiciens, tout ainsi comme s'il avoit jamais sceu qu'est-ce que c'est que Mathematique* […] .[11]

[7] *Ibid*., p. 482.
[8] *Ibid*., deuxième livre *De l'invention du centre de gravité*, p. 459.
[9] Ibid., Adjonction de la statique, première partie *Spartostatique ou l'art pondéraire par cordages*, p. 508.
[10] C'est-à-dire : au pluriel.
[11] Samuel Marolois, *Opera ou Œuvres mathematiques*…, Amsterdam, Jansson, 1628. Première partie, *Géométrie de Samuel Maroloys*, p. 53.

On apprend incidemment par une lettre de Gassendi à Pereisc qu'Albert Girard a servi au siège de Bois-le-Duc en 1629[12] ; si l'on se fie aux rééditions qu'il a entreprises, Girard faisait partie de l'entourage de Stevin et de Marolois, tous deux ingénieurs militaires et mathématiciens, il n'est donc pas étonnant qu'un homme d'une telle compétence et à la recherche d'emploi se soit retrouvé sur les champs de bataille :

> *En l'armée, Mr de Fresne-Canaye, pour me faire cognoistre le Sieur Albert Girard (celuy qui a fait r'imprimer le MAROLOIS), ingénieur maintenant au camp, luy donna à soupper en ma compagnie. Au reste tous ces gens là sont pour le mouvement de la terre* [c'est-à-dire coperniciens]. *Je fus au camp (vous entendez bien que c'est devant Bois le Duc) tout Dimenche et Lundy derniers* […]

À notre connaissance, hormis van Schooten dans son édition de la *Géométrie* de Descartes en 1659, les premiers mathématiciens qui font mention de notre auteur sont Huygens et Leibniz dans la correspondance qu'ils échangent à la fin de l'année 1691[13] ; quels qu'en soient les commentaires, on notera cependant qu'ils nous montrent que Huygens connaissait l'édition girardienne des *Œuvres* de Stevin ; le contraire eût été étonnant dans la mesure où son père, Constantin, était en lien avec tout ce que les Provinces- Unies comptait de savants et d'intellectuels et que l'on a déjà lu son jugement sur Girard (cf. *supra*). Huygens écrit à Leibniz le 16 novembre 1691[14] :

> […] *Il parait par un passage dans les notes de Albert Girard sur Stevin, qu'il doit avoir sçu la solution de cette mesme question des Longitudes. Car il parle de la difference entre la methode de Snellius par la Table des Sommes des secantes et la methode parfaite, qu'il dit estre beaucoup plus courte […] On ne connoissoit pas encore en ce temps là la quadrature de l'Hyperbole ; mais ce Girard avoit penetré bien avant en plusieurs matieres de Geometrie, comme je vois par quelques endroits de ces mêmes notes, il se trompe pourtant au commentaire sur la Statique par cordages au sujet de la courbure de la ligne qui plie par son poids, la quelle courbure il pretend estre parabolique, et qu'il en a la demonstration.*

Leibniz répond à la seconde lettre dès janvier 1692, sur le sujet des quadratures et de sa nouvelle méthode, il évoque au passage Girard en réponse à son correspondant :[15]

> *Il est seur qu'Albert Girard estoit un grand Geometre pour son temps; et il se peut qu'il ait remarqué quelque rapport entre les Logarithmes et les Loxodromies.*

---

[12] *Pierre Gassend, à Bruxelles, à Nicolas-Claude Fabri de Pereisc, à Aix, 21 juillet 1629.* Lettre reproduite dans De Waard, Cornélius, *Journal tenu par Isaac Beeckman…*, , 1953, p. 153.

[13] Huygens, Christian, *Œuvres complètes de Christiaan Huygens…* tome 10, 1905.

[14] *Idem*, Lettre n° 2709, pp. 182-191 : *Christiaan Huygens à G. W. Leibniz, 16 novembre 1691*. L'extrait cité est p. 187. Dans la lettre n° 2726, Huygens relance Leibniz sur le problème des quadratures, car ce dernier n'avait pas encore répondu.

[15] *Ibid.*, Lettre n° 2727, pp. 225-230 : *G. W. Leibniz à Christiaan Huygens, 18 janvier 1692*. Extrait cité p. 228.

C'est vague et succinct, mais à l'époque de l'invention du calcul différentiel par Leibniz, les errances des chercheurs du début du XVII^e^ siècle étaient passées de mode, sauf à adopter un point de vue historique. Tout ceci ne nous apporte que peu de renseignements biographiques et nous devons nous tourner vers des sources plus contemporaines pour en savoir davantage. Il faut cependant avouer qu'on ne connaîtra probablement jamais la date exacte de la naissance d'Albert Girard, puisque les recherches à Saint-Mihiel et à Metz n'ont pas donné grand-chose. Un article centenaire du pasteur Danreuther[16] indique que les Archives municipales de Metz mentionnent un *Humbert Girard* au registre des naissances le 11 octobre 1595, mais le père jésuite Henri Bosmans ne recommandait pas cet article…

CE QUI EST SUR

La source vraiment fiable est finalement la Biographie nationale hollandaise[17], publiée en 1912, dont nous tirons le résumé suivant :

- Albert Girard est né en 1595 à Saint-Mihiel en Lorraine et il a été élevé à Metz dans une famille protestante ;
- Les biographes n'invoquent pas de raisons religieuses à son départ de Lorraine pour la Hollande vers 1614, puisqu'il laisse sa famille à Metz.
- Il épouse Suzanne de Noetbes (aussi appelée alternativement des Monettes / des Nouettes / de Nouet ou Pietersd.) le 17 avril 1614 à La Haye, où il est déclaré comme musicien professionnel (luthiste)
- Inscription à l'Université de Leyde « âgé de 22 ans » sous le nom «Albertus Gerardus, Metensis, 28 avril 1617 » ; c'est l'université dont le programme a été établi par Simon Stevin, qui meurt en 1620, université qu'a fréquentée Samuel Marolois.
- Il entretient une correspondance et une amitié durable avec Golius et d'autres personnalités du monde universitaire, politique et militaire des Provinces-Unies.
- Ses obsèques ont lieu dans la *Groote Kerk* de La Haye le 11 déc. 1632, où il est inhumé avec le titre : « Mr. Aelbert, ingenieur »

Sa vie a donc ressemblé à celle de nombreux protestants français, qui ont voyagé jusqu'en Hollande et y ont trouvé refuge, face aux tensions religieuses en France, ce qui a probablement été aussi le cas de la famille de Samuel Marolois. Comme d'autres scientifiques de son époque, il n'a pas vécu de ses recherches, mais de son art et de ses talents d'ingénieur militaire, pour finir dans le dénuement âgé de moins de quarante ans. Rien ne permet d'affirmer cependant qu'il soit mort sur le champ de bataille.

L'*INVENTION NOUVELLE* DE 1629

En 1629, Girard a déjà un ouvrage à son actif, la *Table des Sinus*, qui a sans doute constitué un intéressant manuel pour les techniciens contemporains, mais qui est également suivi d'un appendice de trigonométrie dont Henri Bosmans dit le plus grand bien en ce qui concerne les formules complexes qui y sont proposées en trigonométrie rectiligne, et surtout

[16] Dans les *Mémoires de la Société des lettres, Sciences et Arts de Bar-le-Duc*, 1894, pp. 231-236.
[17] Et avec l'aide de Google translate… Blok, P.J. et Molhuysen, P.C., *Nieuw Nederlandsch biografisch woordenboek…*, pp. 477-481.

en trigonométrie sphérique.[18] Nous n'en dirons pas plus sur cet ouvrage qui sort de notre propos. Girard a aussi à son actif des traductions ou éditions d'ouvrages de ses proches : la fortification d'Hendrik Hondius, celle de Samuel Marolois, ainsi que les Œuvres complètes de ce dernier.[19] Tout ceci représente un travail très important, qui trouvera son apogée dans l'édition des *Œuvres* de Stevin ; le lecteur parcourant l'ensemble des traités cités reconnaîtra que Girard a beaucoup mieux travaillé pour les autres que pour lui-même…

L'ouvrage est dédié à Henry de Bergaigne, qui allait être nommé premier officier de Bois-le-Duc en 1630 par le prince d'Orange lui-même. Girard y indique que son livre contient *quelques nouveautez en l'Algebre & Geometrie incogneues non seulement des modernes, mais aussi des anciens,* mais il regrette également *qu'elles sont un peu trop tost sorties de [sa] main pour leur donner quelque lustre*. Nous allons en donner le plan général.

LE PLAN DE L'OUVRAGE

On trouvera en Annexe 1 le plan détaillé de l'*Invention*, pour lequel nous avons donné un découpage arbitraire reprenant les grandes parties de l'ouvrage et la plupart des titres, dont le format n'est pas du tout standard dans l'original. Globalement, il y a en fait trois traités dans cet ouvrage dont Bosmans pense que la partie centrale trouve son origine dans l'*Arithmétique* de Stevin[20] : *Tous ceux qui se servent de l'édition des Œuvres de Stevin ne peuvent manquer de s'apercevoir que l'Arithmétique n'est pas annotée* […] *Mais les réflexions que l'Arithmétique de Stevin lui suggéra alors furent si importantes, si neuves, si nombreuses, qu'il n'hésita pas à les réunir en un volume séparé.* Cette explication est fort plausible en ce qui concerne la partie proprement algébrique, d'autant que les exemples fournis font la plupart du temps référence à Stevin et à Viète, lequel avait également fort avancé sur le chemin de la résolution des équations sans recours aux nombres complexes. Cette partie est précédée d'un court rappel des règles de l'arithmétique numérique et de l'arithmétique des polynômes (que Girard nomme, comme Stevin et Mennher avant lui, multinômes ou multinomies). Elle est suivie d'une dizaine de pages complétant le traité de trigonométrie de 1626 à propos des superficies des triangles et polygones rectilignes et sphériques.

LES NOTATIONS

La partie algébrique du texte étant toute entière baignée de l'esprit du maître, Simon Stevin[21], il ne faut pas s'étonner que les notations soient les mêmes que celles de son *Arithmétique,* telles qu'elles sont également reprises dans les éditions girardiennes de 1625 et de 1634. Tout comme dans la *Disme* de 1585, Stevin a utilisé des caractères cerclés (①, ②, ③ et ainsi de suite, avec également le ⓪ comme nous le verrons) qui ont dû faire passer des nuits blanches à ses imprimeurs ! On retrouve cette typographie chez les utilisateurs flamands de la *Disme* (plutôt dans le cercle de l'université de Leyde) lorsqu'il s'agit de représenter les nombres décimaux. L'idée de Stevin était d'indiquer l'ordre des unités en insérant le caractère ⓪ juste après le chiffre des unités, puis chacune des décimales en insérant de même les

[18] Bosmans, *La trigonométrie d'Albert Girard*…, 1926.
[19] Voir les références en bibliographie à la fin de cet article.
[20] Bosmans, *La théorie des équations.*…, 1926, p. 60.
[21] Bosmans écrit: « L'*Invention* est toute entière écrite sous l'empire des suggestions de l'*Arithmetique* du Brugeois » (Bosmans, *op. cit.*, 1926, p. 61).

caractères ①, ② etc. C'est moins compliqué pour les opérations, car on n'y indique les ordres des décimales qu'au-dessus de l'opération posée.

Il faut noter cependant que ce n'est pas la seule utilisation de cette notation cerclée, ni en fait la plus importante : la *Disme* se trouve dans les toutes dernière pages de l'*Arithmétique*, alors que Stevin a déjà utilisé sa notation dès ses premiers chapitres, lorsqu'il est question des *nombres géométriques*. On peut interpréter ces nombres géométriques comme les puissances d'un même nombre, voire les puissances successives de la variable au fur et à mesure de la lecture du texte lorsque l'on passe aux *nombres algebraïques*. Car finalement, pour la résolution des équations dans le livre II, Stevin utilise sa notation pour les puissances de l'inconnue, y compris dans sa traduction de Diophante. À la lecture du texte donné en annexe du théorème fondamental de l'algèbre de Girard, on pourra constater que notre auteur est entièrement fidèle à Stevin jusque dans ses notations.

QUELQUES EXEMPLES DU « STYLE GIRARDIEN »

Si l'introduction arithmétique en elle-même n'est pas très originale (sauf en ce qui concerne les définitions), la partie algébrique pose davantage de questions au lecteur moderne, et ce n'est pas seulement parce que les explications y manquent souvent ; il y a aussi un style caractéristique du début du XVII^e^ siècle, lorsque les mathématiques de l'école algébrique italienne de Tartaglia, Bombelli et autres sont étudiées par des mathématiciens du nord de l'Europe, comme Viète et les nouveaux cossistes germaniques. La résolution des équations semble un domaine sans limite qui passionne les cercles scientifiques, comme celui de Stevin. Girard connaît bien les écrits de Stevin et ses nombreuses références à Regiomontanus, à Bombelli, à Clavius, en bref à tout ce que la recherche compte d'acteurs. Girard d'ailleurs cite lui-même volontiers de nombreuses sources, quoique dans l'*Invention nouvelle* il s'agisse essentiellement de Stevin et de Viète, mais il s'agit des deux auteurs les plus remarquables de cette époque, ceux dont les écrits sont sans doute les plus complets et les plus difficiles à lire. L'ouvrage de Girard complète les leurs, s'en inspire largement et leur emprunte de fait de nombreux exemples qui étaient restés inachevés. Nous allons donner quelques exemples de ce style si particulier des algébristes du XVII^e^ siècle.

Les opérations sur les radicaux sont un sujet à la fois dans la lignée de Stevin selon lequel il n'y a pas de nombres plus irrationnels que les autres mais aussi en contradiction avec celui-ci : Girard calcule avec les racines de manière presque formelle, il cherche systématiquement à exprimer les sommes, différences sous forme radicale, de même qu'il cherchera à opérer sur les *multinomes radicaux*[22] afin d'exprimer les résultats des opérations sous la même forme, y compris leurs racines carrées et cubiques.

Girard ne se sert pas des règles de simplification des radicaux (comme $\sqrt{a^2 b} = a\sqrt{b}$), mais utilise d'autres méthodes comme l'algorithme suivant pour additionner $\sqrt{2}$ et $\sqrt{18}$:

[22] Les expressions de la forme $a + \sqrt{b}$, $\sqrt{c} + \sqrt{d}$ et en principe toutes celles qui font intervenir plusieurs radicaux, même s'il s'agit essentiellement des deux formes citées.

$\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}}=\sqrt{9}=3$; $3+1=4=\sqrt{16}$; $\sqrt{16\times}\sqrt{2}=\sqrt{32}$; donc $\sqrt{18}+\sqrt{2}=\sqrt{32}$.

La formule sous-jacente est claire : $\sqrt{a}+\sqrt{b}=\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}+1\right)\times\sqrt{b}$, qui sera utilisée pour démontrer l'égalité : $\sqrt{3}+\sqrt{48}=\sqrt{75}$. Nous opérerions sans doute autrement aujourd'hui en écrivant : $\sqrt{3}+\sqrt{48}=\sqrt{3}+4\sqrt{3}=5\sqrt{3}$, mais Girard ne le fait jamais dans ce sens. Il a cependant une autre méthode pour éviter les fractions, méthode inspirée du livre II des *Éléments* d'Euclide qui lui permet d'écrire :

$$\sqrt{18}+\sqrt{8}=\sqrt{\left(\sqrt{18}+\sqrt{8}\right)^2}=\sqrt{18+8+2\times\sqrt{18}\times\sqrt{8}}$$
$$=\sqrt{26+2\times\sqrt{18\times8}}=\sqrt{26+2\times\sqrt{36\times4}}=\sqrt{26+2\times12}=\sqrt{50}.$$

Un exemple plus complexe est donné pour la division des multinomes radicaux, lorsqu'il s'agit d'exprimer simplement le quotient de $30+\sqrt{720}$ par $3+\sqrt{5}$:

D'abord, on cherche la partie « entière » : puisque 30 vaut 10 fois 3, il évalue la différence entre $30+\sqrt{720}$ et $10\times\left(3+\sqrt{5}\right)\left[=30+\sqrt{500}\right]$, cela donne $\sqrt{20}$ [23], il peut donc écrire le quotient $10+\frac{\sqrt{20}}{3+\sqrt{5}}$. Pour en trouver une écriture multinome, les calculs se poursuivent :

$$10+\frac{\sqrt{20}}{3+\sqrt{5}}=10+\frac{\sqrt{20}\times\left(3-\sqrt{5}\right)}{\left(3+\sqrt{5}\right)\left(3-\sqrt{5}\right)}=10+\frac{\sqrt{180}-\sqrt{100}}{3^2-5}$$
$$=10+\sqrt{\frac{180}{16}}-\sqrt{\frac{100}{16}}=10+\sqrt{\frac{176+4}{16}}-\frac{10}{4}$$
$$=10+\sqrt{11\tfrac{1}{4}}-2\tfrac{1}{2}=7\tfrac{1}{2}+\sqrt{11\tfrac{1}{4}}$$

C'est assez technique et Girard semble se démener pour rester dans l'ensemble des expressions radicales ; l'exemple le plus technique est la simplification du quotient de $\sqrt{32}+\sqrt{27}+5+\sqrt{6}$ par $1+\sqrt{2}+\sqrt{3}$, mais cela dépasse le cadre de cet article, nous renvoyons le lecteur intéressé au feuillet C de l'*Invention nouvelle*.

De même, à propos de la résolution des équations des second et troisième degrés, nous invoquerons les mêmes raisons que nos auteurs algébristes du XVII[e] siècle lorsqu'ils ont le souci de ne pas lasser : *pour éviter prolixité*, nous renvoyons également le lecteur aux formidables feuillets C3 à E de l'*Invention nouvelle*, ou à un autre article, lequel *j'espere de mettre en lumiere* car *je n'ay pas le loisir, ny le pouvoir d'escrire icy tout ce qui y pourroit estre convenable*…[24]

---

[23] Car $\sqrt{720}-\sqrt{500}=\left(\frac{\sqrt{720}}{\sqrt{500}}-1\right)\times\sqrt{500}=\left(\sqrt{\frac{36}{25}}-1\right)\times\sqrt{500}=\left(\frac{6}{5}-1\right)\times\sqrt{500}=\frac{1}{5}\times\sqrt{500}=\sqrt{20}$.

[24] En espérant par ailleurs que cela n'aura pas pour conséquence la misère pour ma veuve et mes orphelins.

LE THEOREME FONDAMENTAL DE L'ALGEBRE

DEFINITIONS PREALABLES (1) : TAXONOMIE DES EQUATIONS[25]

Arrivant à la fin de la partie algébrique de l'ouvrage[26], le chapitre consacré au théorème fondamental est soigneusement préparé par des définitions dans le style de Stevin et qui, comme celle de Stevin, n'auront pas vraiment de postérité sous cette forme après la publication de la *Géométrie* de Descartes.

Girard distingue tout d'abord les équations simples (du type $x^n = k$) des équations composées ou *mêlées* (définition I) ; il donne comme exemples de la première catégorie les équations : $x^2 = 49$ et $12x = 24$ aux solutions évidentes, et pour la seconde catégorie l'équation $x^2 = 6x + 40$ (solutions -4 et 10) ; en outre, parmi les équations composées, il appelle équations complètes (définition III) celles qui contiennent tous les termes en x^p, pour p inférieur au degré de l'équation et, bien sûr, incomplètes les autres (définition IV). L'un des exemples donnés pour une équation complète est : $x^6 = 11\,x^5 + 13\,x^4 - 7\,x^3 + 6\,x^2 + 9\,x - 31$ (une solution évidente est $x = 1$, il n'y en a qu'une autre réelle, proche de 12,04, ce dont Girard ne parle pas…)

Les équations peuvent également être classées selon leurs coefficients (que Girard appelle les *dénominateurs* ou *dénominations* des quantités) : si les coefficients sont premiers entre eux, l'équation est dite *primitive*, alors que dans le cas contraire elle est *dérivative*, c'est-à-dire simplifiable (définitions VI et VII). Par ailleurs, les coefficients sont généralement répartis des deux côtés du signe d'égalité, comme on l'a vu dans les exemples précédents : on ne trouve pas de standard du type actuel, où la valeur d'un certain polynôme en x s'égale à 0 ; suivant en cela une vieille habitude des algébristes, Girard considère plutôt des expressions dans lesquelles le terme de plus haut degré (affecté du coefficient 1) égale un polynôme de degré inférieur (ce qu'il appellera Ordre postérieur à la définition IX, cf. *infra*). Il nomme le terme de gauche *sujet* ou *antécédent* et l'autre *prédicat*, *parangon* ou *conséquent* (définition II).

La définition VIII traite ensuite des coefficients eux-mêmes et de la classification qu'ils engendrent : le terme de plus haut degré (disons en x^n) se nomme *maxime* ou *haute extrémité* et les suivants les *mêlés*, le premier mêlé étant le terme en x^{n-1}, le second le terme en x^{n-2} et ainsi de suite jusqu'au terme constant nommé *basse extrémité* ou *fermeture* de l'équation. L'exemple est donné en décrivant l'équation : $x^9 = 3\,x^8 - 10\,x^6 + 4\,x + 12$ (qui admet trois racines irrationnelles).

Finalement, les définitions IX et X ont pour objet l'ordonnancement des termes des équations selon trois ordres : le premier (*ordre prieur*), du type $P(x) = k$; le second (*ordre alternatif*) du type $P(x) = Q(x)$ dans lequel le polynôme P ne renferme que des puissances paires de la variable et Q des puissances impaires, de telle sorte que le terme de plus haut degré soit de coefficient positif ; le troisième (ordre postérieur) dans lequel le terme de plus haut degré est isolé : $x^n = Q(x)$ (ce terme sera toujours de coefficient +1). Enfin, l'*ordre alterne des équations* est le plus raffiné de ces ordonnancements, puisque le terme de plus

[25] *Invention nouvelle*…, feuillets E2*v* à E4*r*.
[26] La toute dernière partie traite des *postposées quantités*, c'est-à-dire des équations à plusieurs inconnues.

haut degré sera affecté du coefficient +1 et que les termes d'ordre pair seront d'un côté et les autres de l'autre, *& n'importe si les pairs ou impairs soyent au subject ou au parangon, ny la maxime non plus, moyennant qu'elle aye le signe de plus & l'unité pour nombre*. L'exemple donné est alors : $x^7 = 4x^6 + 14x^5 - 56x^4 - 49x^3 + 196x^2 + 36x - 144$, équation qui, remise en ordre alterne, s'écrit : $x^7 - 14x^5 + 49x^3 - 36x = 4x^6 - 56x^4 + 196x^2 - 144$. Cet exemple n'est pas choisi au hasard puisque le polynôme $x^7 - 4x^6 - 14x^5 + 56x^4 + 49x^3 - 196x^2 - 36x + 144$ n'est autre que le produit $(x-4)(x-3)(x-2)(x-1)(x+1)(x+2)(x+3)$ dont Girard se servira dans l'exposé du grand théorème.

DEFINITIONS PREALABLES (2) : *FACTIONS* ET *TRIANGLE D'EXTRACTION*

La k^{e} faction d'une liste de nombres x_1, x_2, x_3, …, x_n est la somme de tous leurs produits de k termes possibles, comme suit : $1^{\text{ère}}$ faction : $\sum_i x_i$; 2^{e} faction : $\sum_{i \neq j} x_i x_j$; 3^{e} faction : $\sum_{i,j,k} x_i x_j x_k$, etc. La dernière faction est le produit de tous les coefficients des termes de l'équation : $x_1 x_2 x_3 \ldots x_n$. On voit poindre les relations numériques entre racines et coefficients des équations, qui constitueront la seconde partie du théorème fondamental.

Le *triangle d'extraction* est ce que nous appelons triangle arithmétique depuis Blaise Pascal (dont on savait déjà qu'il n'en était pas l'inventeur technique) ; Girard n'explique sa constitution que par un *quand plusieurs unitez sont mises comme à costé, & des autres nombres au milieu, trouvez par le moyen d'addition*, en fournissant la figure du triangle arithmétique jusqu'au quatrième rang, on peut rêver de mieux pour une définition… Il est cependant clair que l'auteur sait parfaitement de quoi il parle, puisqu'il indique que mis à part le rang supérieur qui ne contient que le nombre 1, il nomme les rangs selon la puissance de la variable : le premier rang, contenant 1 et 1, est celui des ①, le second rang, contenant 1, 2 et 1, celui des ②, etc. *& tousjours ainsi à l'infiny* : on reconnaît les coefficients des puissances successives du binôme, mais Girard ne s'en sert pas pour cela ; il donne en effet l'énoncé de son premier théorème : *Si une multitude de nombres sont proposez, la multitude des produits de chacune faction se peut exposer par le triangles d'extraction : & par le rang d'iceluy selon la multitude des nombres*. Ce n'est pas très clair, heureusement que l'auteur fournit l'exemple du rang des ④ : si l'on choisit quatre nombres, on lira le long du rang considéré (1, 4, 6, 4, 1, le premier 1 mis à part, qui *signifie l'unité de la maxime*) que la première faction est la somme de quatre nombres, la seconde la somme de six produits deux à deux, la troisième faction la somme de quatre produits trois à trois et la dernière faction composée d'un seul produit ; en effet, si ces quatre nombres sont *a*, *b*, *c* et *d*, on obtient bien : $a+b+c+d$; $ab+ac+ad+bc+bd+cd$; $abc+abd+acd+bcd$; et $abcd$. On reconnaît sous cette forme alambiquée l'équivalent du nombre de combinaisons d'une, deux, trois et quatre quantités.

L'ENONCE DU THEOREME FONDAMENTAL

> *Toutes les équations d'algèbre reçoivent autant de solutions, que la denomination de la plus haute quantité le demonstre, excepté les incomplettes ; & la premiere faction des solutions est esgale au nombre du premier meslé, la seconde faction des mesmes est esgale au nombre du deuxiesme meslé, la troisiesme au troisiesme, & tousjours ainsi,*

tellement que la derniere faction est esgales à la fermeture, & ce selon les signes qui se peuvent remarquer en l'ordre alternatif.

La restriction donnée pour les équations incomplètes tombe d'elle-même dans un des paragraphes suivants, lorsque Girard indique qu'il suffit de les compléter en ajoutant les termes manquants affectés d'un coefficient nul. La seconde partie du théorème indique les relations entre coefficients et polynômes symétriques des racines, comme on le ferait de nos jours, mais l'exemple donné en explication rend plus claires les idées ; Girard traite l'exemple de l'équation complète 1 ④ égale 4 ③ + 7 ② – 34 ① – 24 [ici, l'auteur oublie d'indiquer l'ordre ⓪], c'est-à-dire : $x^4 = 4x^3 + 7x^2 - 34x - 24$. Il faut tout d'abord l'écrire dans l'ordre alternatif, avec tous les termes d'ordre pair d'un même côté, et que la maxime ait pour coefficient +1 : $x^4 - 7x^2 + 24 = 4x^3 - 34x$. Le problème est que le dernier terme est écrit -24 au lieu de +24… Heureusement, le détail de la résolution de cette équation n'est pas donné et l'auteur n'indique que les conséquences de son théorème :

1° L'équation admet 4 solutions : x_1, x_2, x_3 & x_4
2° On a les équations : $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4$,
$x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = -7$,
$x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = -34$, et
$x_1x_2x_3x_4 = -24$

Cette première illustration est suivie de deux autres exemples dont Girard donne la solution, qui est cependant évidente : dans le premier : $x^4 = 4x^3 - 6x^2 + 4x - 1$, on remarque immédiatement qu'il s'agit de l'équation $(x-1)^4 = 0$, écrite sous forme développée ; aussi Girard précise-t-il : *quand les solutions sont unitez sans moins, […] les factions sont les nombres du triangle d'extraction du rang de la plus haute quantité.* La seconde illustration est l'équation du septième degré déjà présentée en exemple des définitions X et XI (cf. *supra*) et dont les solutions sont -4, -3, -2, -1, 1, 2 et 3.

Ce sont les deux exemples suivants qui permettent de comprendre comment Girard met en œuvre son théorème pour la résolution effective d'équations (de faible degré…)

UTILISATION DU THEOREME

Le premier exemple est celui de l'équation incomplète « 1③ esgale à 167① – 26 ». Les coefficients sont-ils purement arbitraires ? Il n'est pas facile de trancher, car on remarque que 167 est presque le carré de 13 tandis que 26 est le double de 13 ; si le dernier terme avait été égal à +26, le nombre 13 aurait été une solution évidente de l'équation, mais on n'a pas besoin de grands efforts supplémentaires pour voir que le nombre -13 en est une ici. L'équation a donc pu être fabriquée délibérément, dans la mesure où Girard a besoin d'une première solution pour appliquer pleinement le théorème sans autre considérations techniques ou théoriques (cf. *infra*).

Les étapes de la résolution sont détaillées de la manière suivante :

1° L'équation est rendue complète : $x^3 = 0x^2 + 167x - 26$.
2° Elle est mise dans l'*ordre alterne* : $x^3 - 167x = 0x^2 - 26$.
3° Le degré indique qu'il y aura trois solutions [notre notation] : x_1, x_2, & x_3 (*maxime*).

4° Les factions sont : $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ (*premier mêlé*)
$x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 = -167$ (*deuxième mêlé*).
$x_1 x_2 x_3 = -26$ (*fermeture*)

5° En prenant $x_1 = -13$ (solution évidente), on est ramené à la recherche de x_2 et x_3 vérifiant le système : $\begin{cases} x_2 x_3 = 2 \\ x_2 + x_3 = 13 \end{cases}$, c'est-à-dire les deux solutions de l'équation $x^2 + 2 = 13x$, qui sont $6\frac{1}{2} + \sqrt{40\frac{1}{4}}$ et $6\frac{1}{2} - \sqrt{40\frac{1}{4}}$, selon l'écriture même de Girard.

Le second exemple est du même type que le premier ($x^3 = 300x + 432$, avec la racine évidente 18), mais le troisième exemple est plus intéressant car il donne à voir des solutions imaginaires : « 1④ esgale à 4① – 3 » ; les quatre factions sont 0, 0, 4 et 3 et l'auteur en conclut sans explication que les quatre solutions sont 1, 1, $-1+\sqrt{-2}$ et $-1-\sqrt{-2}$, en ajoutant : *Notez que le produit des deux derniers est* 3. Face aux détracteurs de ces *solutions impossibles*, il explique qu'il les conserve car elles montrent la justesse de la règle générale et permettent aussi de clôturer la recherche quand il n'y a pas d'autre solution réelle.

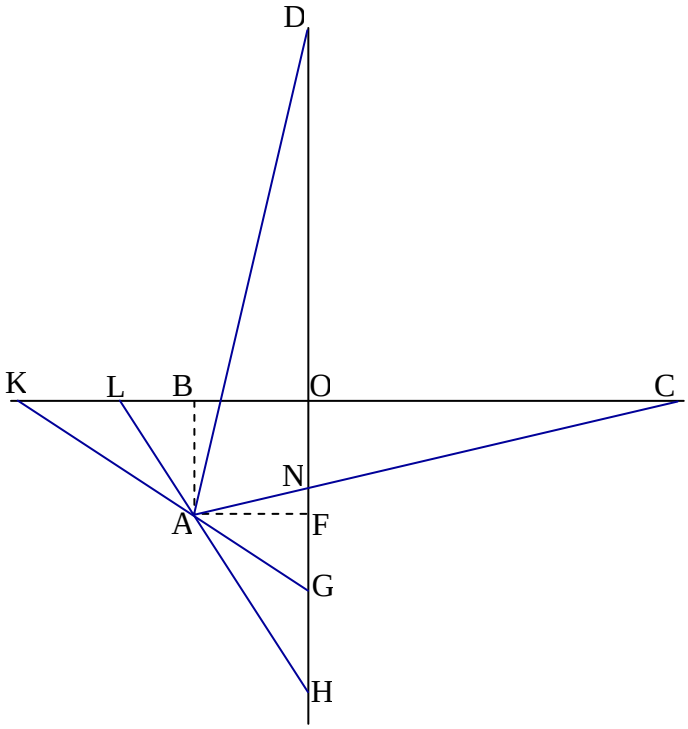
Il est vrai que la méthode fonctionne très bien quand on connaît déjà une partie des solutions ! C'est implicite dans le texte de Girard et en toute cohérence, il applique sa technique à la résolution complète d'équations trouvées dans les textes de Stevin et de Viète, qu'il égratigne au passage en indiquant que sa méthode à lui permet d'éviter de *cercher toutes les reigles imparfaittes que Viette en a donné*. Il conclut sur la valeur du théorème en mettant en avant ses avantages principaux : connaissance *a priori* du nombre de solutions ; « nature » des équations, qui ne sont en fait réduite qu'à leurs factions ; interprétation simple des problèmes en termes de factions lorsqu'on connaît les contraintes de sommes, produits deux à deux, etc. Girard entrevoit finalement les relations entre coefficients et somme des puissances des racines ; si on nomme A, B, C, D etc., les mêlés successifs, on a les relations : $\sum_i x_i = \mathrm{A}$; $\sum_i x_i^{\,2} = \mathrm{A}^2 - 2\mathrm{B}$; $\sum_i x_i^{\,3} = \mathrm{A}^3 - 3\mathrm{AB} + \mathrm{C}^3$; $\sum_i x_i^{\,4} = \mathrm{A}^4 - 4\mathrm{A}^2\mathrm{B} + 4\mathrm{AC} + 2\mathrm{B}^2 - 4\mathrm{D}$. Il n'en écrit pas plus et ne donne pas non plus la démonstration de ce qu'il avance, comme à l'accoutumée dans son traité.

L'EXPLICATION DES SOLUTIONS NEGATIVES

Après un bref paragraphe traitant des équations sans solution réelle (*il y a de la determinaison aux equations*), Girard en vient à l'exposition d'une vision géométrique géniale des solutions négatives, dont il semble qu'il est le premier à la donner : *Iusques icy nous n'avons encor expliqué à quoy servent les solutions par moins, quand il y en a. La solution par moins s'explique en Geometrie en retrogradant, & le moins recule, là où le + avance.* Pour illustrer son propos, il traite d'un « problème d'inclinaison »[27] : sur la figure ci-dessous,

[27] Bosmans rappelle que ce problème, ou son équivalent, se trouve dans le livre 7 de la *Collection mathématique* de Pappus et qu'il ne s'agit donc pas d'une invention de Girard (Bosmans, *La théorie des équations.…*, 1926, p. 148). Il remarque que ce problème sera également remis à jour par Descartes dans sa Geometrie de 1637 (page 387), insistant sur le fait qu'il ne faut donc plus attribuer à ce dernier l'interprétation géométrique des solutions négatives des équations.

les deux lignes (BC) et (DG) sont perpendiculaires et se coupent en O, la figure ABOF est un carré de côté 4 ; on trace une ligne AC qui coupe (DG) en N, de sorte que la longueur de la ligne NC soit $\sqrt{153}$ [28]. La question est de trouver la longueur NF.



Girard affirme que si l'on prend comme inconnue la ligne NF, le problème se ramène à la résolution de l'équation :

$$x^4 = 8x^3 + 121x^2 + 128x - 256$$

Ceci demande un peu de travail pour pallier le manque d'explication, mais il ne s'agit en fait que d'une simple application de deux théorèmes bien connus des collégiens français : d'après le théorème de Pythagore appliqué au le triangle ANF, on a en effet, $AN^2 = AF^2 + NF^2 = 16 + x^2$, puis la similitude des triangles ANF et ONC ou une utilisation du théorème dit de Thalès donne : $\frac{AN}{\sqrt{153}} = \frac{x}{4-x}$.

Élevée au carré la proportion s'écrit : $\frac{x^2+16}{153} = \frac{x^2}{(4-x)^2}$, puis par produit « en croix » $(x^2+16)\times(16-8x+x^2) = 153x^2$, dont le développement revient à l'expression de Girard.

Quant aux solutions de l'équation girardienne, on peut remarquer que les données du problème sont suffisamment bien choisies pour que 1 soit une solution de l'équation, ce corrobore notre remarque sur le choix de la longueur $\sqrt{153}$. Girard n'explique pas comment il trouve les trois autres solutions (16, $-4\frac{1}{2}+\sqrt{4\frac{1}{4}}$ et $-4\frac{1}{2}-\sqrt{4\frac{1}{4}}$), mais l'équation est de degré 4, ce qui implique bien quatre solutions ; or, si la première trouve son interprétation évidente dans la longueur du segment NF, on peut calculer assez facilement que la seconde correspond à la longueur FD (le carré de OD vaut $DP^2 - OP^2$, soit 153 – 9). Mais qu'en est-il des deux autres qui sont des quantités négatives ? Eh bien, Girard nous l'indique : les longueurs FG et FH seront prises comme nombres négatifs (*moins que rien*) puisque les segments sont orientés dans le sens contraire de celui des segments NF et FD (*en retrogradant, prenant que FN, FD avancent, & FG, FH reculent en arrière*) et les longueurs KG et HL sont bien égales à $\sqrt{153}$.

[28] La valeur peut avoir été obtenue en prenant 1 pour valeur de NF et en appliquant tout simplement les théorèmes utilisés dans notre explication.

CONCLUSION

Girard est-il bien reconnu à sa juste valeur ? La difficulté du texte de son ouvrage ainsi que la désinvolture de la mise en page n'ont sans doute pas favorisé sa compréhension, donc sa lecture, par ses contemporains « ordinaires ». Mais ne reconnaît-on pas dans le dernier problème évoqué une forme de repère cartésien et un point A donné par ses coordonnées dans ce repère ? Pas besoin d'attendre la géométrie de Descartes ni celle de Chasles 250 ans postérieure, les idées sont bien là et le discours, bien qu'embarrassé dans son plan et très succinct dans ses justifications, ne laisse aucun doute sur la clarté des concepts exposés. Descartes aussi a baigné dans l'atmosphère du premier cercle de Stevin, ne serait-ce qu'à travers les notes prises par son ami Beeckman chez la veuve du Brugeois juste après sa mort en 1620. La pensée de Stevin a irradié celle des géomètres du XVII^{e} siècle et l'on peut dire que Girard y a joué un rôle fondamental en bon disciple du maître. De nombreuses interprétations sont possibles, y compris dans le statut social des protagonistes (entre ceux qui ont besoin de travailler pour vivre, ceux qui bénéficient de la protection des « grands » et les nobles dont l'existence est assurée par la lignée), il est cependant sûr qu'Albert Girard mérite davantage de reconnaissance pour l'énorme travail accompli ainsi que ses idées novatrices dans des domaines aussi variés que l'algèbre et les mathématiques appliquées.

BIBLIOGRAPHIE

Blok, P.J. et Molhuysen, P.C., *Nieuw Nederlandsch biografisch woordenboek, Deel 2*, Leyde, A.W. Sijthoff, 1912.

Bosmans, Henri (S.-J.), La théorie des équations dans l'« Invention nouvelle en algèbre » d'A. GIRARD, *Mathesis*, 40, 1926, pp. 59-67 ; 100-105 ; 145-155.

Bosmans, Henri (S.-J.), La trigonométrie d'Albert Girard (La Haye, 1626), *Mathesis*, 40, 1926, pp. 337-348 ; 385-392 ; 433-439.

Bosmans, Henri (S.-J.), Albert Girard et Viète, à propos de la théorie de la « syncrèse » de ce dernier, *Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, t. 45, 1926, première partie, pp. 35-42.

Danreuther, H., Le mathématicien Albert Girard de Saint Mihiel 1595-1633, *Mémoires de la Société des lettres, Sciences et Arts de Bar-le-Duc*, 1894, pp. 231-236.

Girard, Albert, *Table des sinus, tangentes & secantes, selon le raid de 10 000 parties. Avec un traicté succinct de la Trigonometrie, tant des triangles plans, que Sphericques… Par Albert Girard, Samielois.* La Haye : Jakob Elzevir, 1626.

Girard, Albert, *Invention nouvelle en l'algèbre, par Albert Girard, mathématicien. Tant pour la solution des équations que pour recognoistre le nombre de solutions qu'elles reçoivent…* Amsterdam : Guillaume Jansson Blaeuw, 1629.

Hondius, Hendrik, *Description et breve declaration des regles generales de la fortification...* traduit du flamend en langue françoise par A. G. S., La Haye, Hendrik Hondius, 1625.

Huygens, Christian, *Œuvres complètes de Christiaan Huygens, publiées par la Société hollandaise des Sciences. Tome dixième : correspondance 1691 - 1695*. La Haye, Martinus Nijhoff, 1905.

Marolois, Samuel, *Opera Mathematica ou Œuvres Mathematiques traictans de geometrie, perspective, architecture et fortifications…*, Amsterdam, Jan Janssen, 1628. La fortification et la perspective avaient paru à part en 1627.

Stevin, Simon, *L'Arithmetique de Simon Stevin de Bruges, contenant les computations des nombres arithmetiques ou vulgaires, aussi l'Algebre, avec les equations de cinc quantitez...* Leyde, Christophle Plantin, 1585.

→ Deuxième édition dans *Mémoires mathematiques contenant ce en quoy s'est exercé le Tres-illustre, Tres-excellent Prince & Seigneur Maurice Prince d'Orange, Comte de Nassau…, translaté en Françoys par Jean Tuning…* Leyde, Jan Paedts Jacobszon, 1608.

→ Troisième édition : *L'Arithmetique de Simon Stevin de Bruges, reveuë, corrigee & augmentee de plusieurs traictez et annotations par Albert Girard, Samielois Mathematicien*. Leyde, les Elzeviers, 1625.

→ Quatrième édition dans les *Œuvres* de Stevin, Leyde, 1634 (cf. ci-dessous).

Stevin, Simon, *Les Œuvres mathématiques de Simon Stevin de Bruges, où sont insérées les mémoires mathématiques, esquelles s'est exercé le Très-haut & Très-illustre Prince Maurice de Nassau etc. Le tout reveu, corrigé & augmenté par Albert Girard, Samielois, Mathématicien*. Leyde, Bonaventure & Abraham Elsevier, 1634.

Unger, Johan Hendrik Willem, *Dagboek van Constantijn Huygens [annotata ior diariis manu proavi, proaviae et avi mei Hugeniorum et Hoefnagliae ab anno 1606 usque ad annum 1685] : voor de eerste maal naar het afschrift van diens kleinzoon / uitgegeven door J. H. W. Unger*. Amsterdam, Binder, 1885.

De Waard, Cornélius, *Journal tenu par Isaac Beeckman de 1604 à 1634, publié avec une introduction et des notes de C. De Waard, tome quatrième (supplément)*, La Haye, Martinus Nijhoff, 1953.

Annexe 1 : Plan de l'*Invention.*[29]

Premier traité (***Complément mathématique***) : Arithmétique, « multinomes »

1. Les commencements de l'Arithmétique (Introduction arithmétique)
    1.1. Prolation des nombres [= leur écriture dans le système décimal]
    1.2. Des 4 conjugaisons [= opérations]:
        a. Addition ; *b*. Soubstraction ; *c*. Multiplication ; *d*. Division
    1.3. Fractions et rompus *a*. Préparation aux fractions ;
        b. Préparation aux rompus
        c. Conjugaison des fractions
    1.4. De la règle de trois
2. Arithmétique des multinomes [= expressions polynomiales] radicaux [= avec racines].
    2.1. Des caractères des puissances & racines [notations avec exposants]
    2.2. Des caractères de conjonction et disjonction [signes] ; les 4 conjugaisons
    2.3. De la multiplication & division des radicaux
    2.4. Addition et soustraction des radicaux *a*. Préparation I, II, III et IIII
        b. Addition *c*. Soustraction
    2.5. Division des multinomes radicaux.
    2.6. Racines des multinomes radicaux : *a*. Racine carrée *b*. Racine cubique

Deuxième traité : Algèbre.

1. Construction Algebraïque sur les Questions
2. De la réduction Algébraïque / De l'Isomère
3. Des équations
    3.1. [Second degré :] *Quand les* ② *sont esgales à* ① ⓪
    3.2. [Troisième degré :] *a*. *Quand* 1 ③ *est esgale à* ① & ⓪ [avec formule de Cardan]
        b. *Quand* 1 ③ *est esgale à* ① & ⓪ [autre cas, résolution Girard]
        c. *Quand* 1 ③ *est esgale à* ① & ⓪ : *le mesme en Geometrie*.
        d. *Quand* 1 ③ *est esgale à* ① − ⓪
        e. *Quand* 1 ③ *est esgale à* − ① + ⓪
    3.3. *Nouvelle manière* *a*. Exposition [2 exemples] *b*. Exemples
4. Théorème fondamental (Théorèmes 1 & 2).
    4.1. Définitions

[29] Ce découpage est arbitraire et n'existe pas vraiment dans l'original, certains titres mis à part.

4.2. Théorème 1 : sur les factions

4.3. Théorème 2 : théorème fondamental. Exemples.

5. Problème d'inclinaison (pour expliquer les quantités −)

6. Des postposées quantités en l'Algèbre.

Troisième traité : La mesure des triangles et polygones sphériques.

1. Déclaration préalable sur la mesure des angles en degrés

2. Hypothèses (ancienne, nouvelle)

3. Théorème : Mesure de l'aire des polygones sphériques en degrés sphériques.

3.1. *a*. Lemme 1 *b*. Lemme 2 *c*. Lemme 3

3.2. Théorème :

3.3. Explications 1 & 2

3.4. Exemple

4. Proposition : Mesure de l'aire des triangles sphériques.

4.1. Démonstration pour les fibules

4.2. Démonstration dans certains triangles sphériques

4.3. Démonstration dans tous les triangles sphériques

4.4. Démonstration pour tous les polygones sphériques

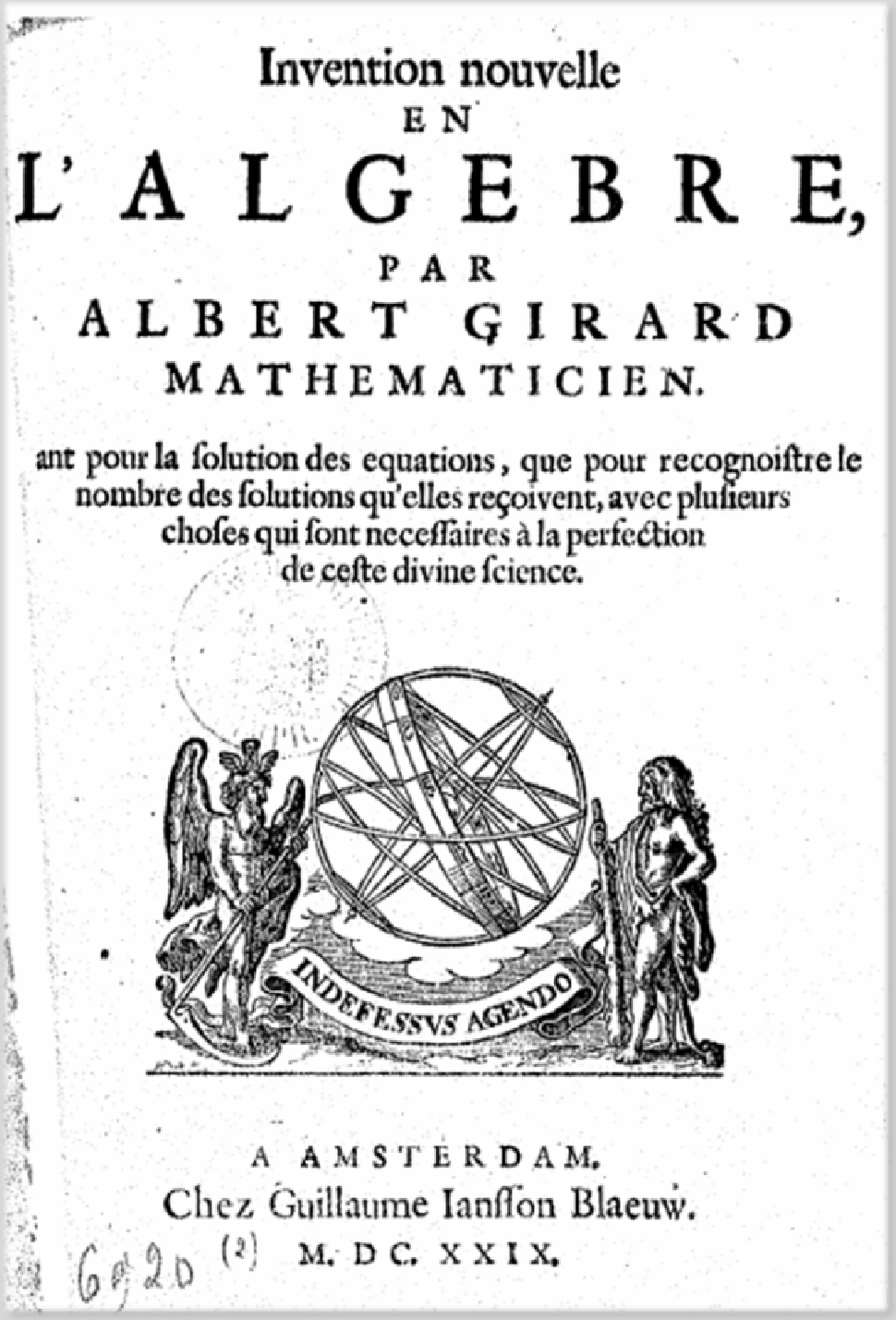
5. Mesure des angles solides

5.1. Méthode

5.2. Corollaire

5.3. Cas des cinq corps réguliers.

Annexe 2 : Frontispice de l'*Invention* & feuillets E2*v* à F4*r*.



Invention nouvelle
EN
L'ALGEBRE,
PAR
ALBERT GIRARD
MATHEMATICIEN.

ant pour la ſolution des equations, que pour recognoiſtre le nombre des ſolutions qu'elles reçoivent, avec pluſieurs choſes qui ſont neceſſaires à la perfection de ceſte divine ſcience.

A AMSTERDAM.
Chez Guillaume Ianſſon Blaeuw.
M. D C. XXIX.

6° 20 (2)

Source gallica.bnf.fr / Bibliothèque nationale de France

Il y a encor des facilitez, qui peuvent ſouvent arriver, c'eſt lors que la 1 ① vaut 1.

comme 1 ③ eſgale à { 7 ① — 6, car 7 — 6 eſt 1 ; $5\frac{1}{4}$ ① — $4\frac{1}{4}$; $\frac{1}{7}$ ① + $\frac{1}{7}$

Et auſſi aux autres equations plus baſſe, ou plus haute que ③; & ayant une ſolution, on pourra remettre les autres en queſtion, comme on verra cy apres.

Le Theoreme qui doit ſuivre ayant beſoin de nouveaux termes, les definitions s'enſuivront premierement.

I. Definition.

Equation ſimple, eſt celle qui n'a qu'une quantité eſgale à un nombre : autrement elle eſt dite Compoſée ou Meſlée.

Explication.

Comme quand 1 ② eſt eſgale à 49 : ou 12 ① eſgale à 24, aſſavoir un terme eſtant eſgal a l'autre, l'equation eſt ſimple & pure : Mais quand il y a plus de termes que deux, elle eſt Compoſée & Meſlée, comme ſi 1 ② eſt eſgale a 6 ① + 40, ou des ſemblables equations.

II. Definition.

Quand une grandeur eſt cõparée a une autre, la premiere eſt dite eſtre le ſubject, ou l'antecedant, l'autre le predicat, parangon, ou conſequent.

Explication.

Comme quand 3 ② — 4 ① eſt eſgale a 70; alors ces 3 ② — 4 ① ſont dites eſtre le ſubject, & les 70 le parangon ou conſequent.

III. Definition.

Equation complette, eſt celle qui a toutes les quantitez ſans en delaiſſer pas une.

IV. Definition.

Et equation incomplette eſt une equation meſlée, qui n'a pas toutes ſes quantitez.

Explication.

Par exemple ſoit 1 ⑥ eſgale à 11 ⑤ + 13 ④ — 7 ③ + 6 ② + 9 ① — 31, telle equation eſt dite complette, pource qu'elle a toutes les quantitez qui ſe peuvent trouver depuis la majeure ⑥, car elle a les ⑤. ④ ③ ② ① & ⓪; au contraire ① ④ eſgale à 5 ② + 36, ou bien 1 ③ eſgale à 12 ① — 16, & autres de meſme façon ſont dites incomplettes pour n'avoir toutes les quantitez depuis la majeure.

V. Definition.

Preſque complette eſt une equation meſlée, laquelle n'a qu'un defaut, & complette a deux pres eſt celle qui a deux defauts, & ainſi a trois pres, &c.

Explication.

Comme 1 ③ eſgale à 7 ① — 6 eſt preſque complette, puis qu'elle n'a qu'un defaut, mais

VI. Definition.

Equation primitive eſt quand les denominateurs des quantitez ſont entr'eux premiers.

Explication.

Comme 1 ④ eſgale à 6 ③ — 13 ① + 16 eſt primitive : car les denominateurs des quantitez ④ ③ ① ⓪ ſont entr'eux premiers.

VII. Definition.

Equation derivative eſt quand les denominateurs des quantitez ſont entr'eux compoſez.

Explication.

Comme 1 ⑥ eſgale à 7 ④ — 9 ② + 12 ⓪, car alors les denominateurs ⑥ ④ ② ⓪ ſont entr'eux compoſez, car 2 eſt leur commune meſure, & ③ ② ① ⓪ ſont les primitifs ; item 1 ③ eſgale à 17, eſt une equation derivative, & leurs quantitez ③ ⓪, ſont derivatives des primitives, comme dit auſſi Stevin en ſon Arithmetique, Defin 27e: Or les derivatives ſe reſoudent comme les primitives, ſeulement ont une extraction davantage, ſelon la hauteur de la commune meſure.

VIII. Definition.

Es Equations meſlées, la plus haute quantité eſt dite Maxime; ou haute extremité : Celle qui eſt un degré plus bas, eſt dite premier meſlé; celle qui eſt encor un degré plus bas, eſt dite ſecond meſlé; & ainſi conſequemment, tellement que le ⓪, eſt la fermeture ou baſſe extremité.

Source gallica.bnf.fr / Bibliothèque nationale de France

Explication.

Soit 1 ⑨ eſgale à 3 ⑧ — 10 ⑥ + 4 ① + 12 : alors la 1 ⑨ eſt la maxime ou haute extremité : les 3 ⑧ le premier meſlé : les 10 ⑥ le troiſieſme meſlé : les 4 ① le huictieſme meſlé : & le 12 eſt la baſſe extremité ou la fermeture le ſeul cogneu.

IX. Definition.

Es Equations meſlées il y a trois ordres: le premier eſt dit Ordre prieur, lors que les nombres d'Algebre ſont le ſubject (comme incogneuë a part) & la fermeture ou nombre commun eſt le predicat ou parangon (comme ſeul cogneu d'autrepart.) Le ſecond ordre eſt l'alternatif, où les quantitez paires ſont ſeparées des impaires, tellement que la haute extremité ſoit + & non pas —: Le troiſieſme eſt l'ordre poſterieur, là où la haute extremité eſt ſeule avec le ſigne +, avec le nombre 1.

X. Definition.

Ordre alterne des Equations, eſt quand la maxime ou haute extremité n'a autre nombre que l'unité, avec le ſigne +, & que les denominateurs ou caracteres impairs ſont d'un coſté, & les pairs de l'autre, aſſavoir les uns au ſubject, les autres au predicat. Ce que ſert à retrouver les ſignes originaux, en remettant l'equation en queſtion.

Explication.

Soit 1 ⑦ eſgale à 4 ⑥ + 14 ⑤ — 56 ④ — 49 ③ + 196 ② + 36 ① — 144 : ceſte equation eſtant remiſe en l'ordre alternatif 1 ⑦ — 14 ⑤ + 49 ③ — 36 ① ſera eſgale à 4 ⑥ — 56 ④ + 196 ② — 144 ⓪; car alors les denominateurs impairs ⑦ ⑤ ③ ① ſont d'un coſté, & les pairs de l'autre, & n'importe ſi les pairs ou impairs ſoyent au ſubject ou au parangon, ny la maxime non plus, moyennant qu'elle aye le ſigne de plus, & l'unité pour nombre, comme en l'exemple ſuſdit : or cecy eſt pour recognoiſtre les ſignes, comme ſera dit cy apres.

XI. Definition.

Quant pluſieurs nombres ſont propoſez, la ſomme totale ſoit dite premiere faction : la ſomme de tous les produits de deux à deux ſoit dite deuxieſme faction : la ſomme de tous les produits de 3 à 3 ſoit dite la troiſieſme faction, & tousjours ainſi juſques à la fin, mais le produit de tous les nombres ſoit la derniere faction : or il y a autant de factions que de nombres propoſez.

Explication.

Soyent propoſez tant de nombres qu'on voudra 2, 4, 5, leur ſomme 11 eſt la premiere faction : les produits de deux à deux ſont 8, 10, 20, dont la ſomme de tels produits 38 eſt dite deuxieſme faction : mais le produit de trois à trois 40 ne ſe trouve qu'une fois, & partant ſera la derniere faction: item ſi ces quatre nombres eſtoyent propoſez, 2, — 3, 1, 3 : la premiere faction ſeroit 3, la deuxieſme — 7, la troiſieſme — 27, & la quatrieſme & derniere ſeroit — 18 : finalement les factions de ces ſept nombres 1, 2, 3, 4, — 1, — 2, — 3 ſeront 4, — 14, — 56, 49, 196, — 36, — 144, qui ſont auſſi ſept en nombre.

XII. Definition.

Quand pluſieurs unitez ſont miſes comme à coſté, & des autres nombres au milieu, trouvez par le moyen d'addition telle figure, ſoit appellée triangle d'extraction : & l'unité d'enhaut ſignifier l'arithmetique ſimple, & les autres pour l'algebre; aſſavoir 1, 1, ſoit dit le rang des ①; & 1, 2, 1, le rang des ②; puis 1, 3, 3, 1, ſoit appellé le rang des ③, & tousjours ainſi à l'infiny.

I. Theoreme.

Si une multitude de nombres ſont propoſez, la multitude des produits de chacune faction ſe peut expoſer par le triangle d'extraction : & par le rang d'iceluy ſelon la multitude des nombres.

Explication.

Soyent 4 nombres, il faudra prendre le rang des ④ au triangle d'extraction, qui eſt 1, 4, 6, 4, 1; le premier 1 ſignifie l'unité de la maxime; le 4 la premiere faction qui eſt la ſomme des 4 nombres; le 6 ſignifie que la deuxieſme faction eſt compoſée de 6 produits deux à deux; & ainſi du reſte.

II. Theoreme.

Toutes les equations d'algebre reçoivent autant de ſolutions, que la denomi-

Source gallica.bnf.fr / Bibliothèque nationale de France

denomination de la plus haute quantité le demonſtre, excepté les incomplettes : & la premiere faction des ſolutions eſt eſgale au nombre du premier meſlé, la ſeconde faction des meſmes, eſt eſgale au nombre du deuxieſme meſlé ; la troiſieſme, au troiſieſme, & tousjours ainſi, tellement que la derniere faction eſt eſgale à la fermeture, & ce ſelon les ſignes qui ſe peuvent remarquer en l'ordre alternatif.

Explication.

Soit une equation complette 1 ④ eſgale 4 ③ + 7 ② — 34 ① — 24 : alors le denominateur de la plus haute quantité eſt ④, qui ſignifie qu'il y a quatre certaines ſolutions, & non plus ny moins, comme 1, 2, — 3, 4 : tellement que le nombre du premier meſlé 4, eſt la premiere faction des ſolutions, le nombre du deuxieſme meſlé 7, & tousjours ainſi ; mais pour voir la choſe en ſa perfection, il faut prendre les ſignes qui ſe remarquent en l'ordre alternatif, comme 1 ④ — 7 ② — 24 ⓪ eſgale à 4 ③ — 34 ① : alors les nombres avec leurs ſignes, (ſelon l'ordre des quantitez) ſeront 4, — 7, — 34, — 24, qui ſont les quatre factions des quatre ſolutions.

Soit autrefois 1 ④ eſgale à 4 ③ — 6 ② + 4 ① — 1, & en ordre alterne 1 ④ + 6 ② + 1 eſgal à 4 ③ + 4 ① ; dont les nombres avec les ſignes, ſelon l'ordre des quantitez ſont 4, 6, 4, 1, qui ſont factions des quatre ſolutions 1, 1, 1, 1, & ainſi des autres ; (notez icy que quand les ſolutions ſont unitez ſans moins, que les factions ſont les nombres du triangle d'extraction du rang de la plus haute quantité,) de meſme en l'equation de la dixieſme definition, qui eſt 1 ⑦ eſgale 4 ⑥ + 14 ⑤ — 56 ④ — 49 ③ + 196 ② + 36 ① — 144 ; il y aura 7 ſolutions, aſſavoir 1, 2, 3, 4, — 1, — 2, — 3 : deſquels nombres l'expoſition ſe fait en la dixieſme & onzieſme definition.

Touchant les equations incomplettes, elles n'ont pas tousjours tant de ſolutions, neantmoins on ne laiſſe pas d'expliquer les ſolutions qui ſont impoſſible d'exiſter, & monſtrer ou giſt l'impoſſibilité à cauſe de la defectuoſité & incomplexion de l'equation, comme 1 ③ eſgale à 7 ① — 6, alors les trois ſolutions y ſont encore, aſſavoir 1, 2, — 3 ; & toutes les incomplettes comme celle-cy ſe peuvent mettre en forme de complettes ainſi, 1 ③ eſgale à 0 ② + 7 ① — 6, afin de trouver toutes les ſolutions ; comme celle qui a eſté faite cy-devant, aſſavoir 1 ③ eſgale à 167 ① — 26 ; elle ſera complette, ainſi 1 ③ eſgale à 0 ② + 167 ① — 26 : & en

& en ordre alternatif, 1 ③ — 167 ① eſgal à 0 ② — 26, les nombres avec leurs ſignes (ſelon l'ordre de leurs quantitez) ſeront 0, — 167, — 26 : c'eſt à dire trouvons trois nombres qui ayent telles factions, aſſavoir que leur ſomme ſoit 0, les produits de deux à deux — 167, & le produit des trois — 26 ; or en ayant trouvé un des trois comme cy-devant — 13, alors puis que le produit des trois eſtoit — 26, le produit des deux autres ſera 2 ; or la ſomme des trois nombres eſt 0, & l'un eſt — 13 : donc la ſomme des deux autres ſera 13 ; parquoy la queſtion eſt remiſe à celle-cy, trouvons deux nombres dont la ſomme ſoit 13, & leur produit 2 ; (& notez qu'on dit trouvez deux nombres, ce ſera donc une equation dont la majeure quantité eſt 1 ②, on parle des factions auſſi, c'eſt que la ſomme ſoit 13 & le produit 2 ; & ainſi 1 ② + 2 ſera eſgale à 13 ①, voila l'equation en ordre alterne, laquelle remiſe en commune pour la reſoudre, on aura 1 ② eſgale à 13 ① — 2, & alors) les nombres de ſolution ſeront $6\frac{1}{2} + \sqrt{40\frac{1}{4}}$ & auſſi $6\frac{1}{2} - \sqrt{40\frac{1}{4}}$, leſquels avec — 13 feront les trois ſolutions requiſes ; la preuve ſe fera comme on voudra tout du long.

Item 1 ③ eſgale à 300 ① + 432, laquelle remiſe en ordre alterne ce ſera 1 ③ — 300 ① eſgales à 0 ② + 432 ; les factions ſeront 0, — 300, 432 : donc trouvons trois nombres &c. Or l'un eſt 18 ; donc la ſomme des deux autres ſera — 18, & leur produit 24 ; parquoy 1 ② ſera eſgale à — 18 ① — 24, les deux ſolutions ſont $-9 + \sqrt{57}$ & $-9 - \sqrt{57}$, puis l'autre cy-deſſus 18 feront les trois ſolutions requiſes : de meſme ſi 1 ④ eſt eſgale à 4 ① — 3, alors les quatre factions ſeront 0, 0, 4, 3 ; & partant les quatre ſolutions ſeront

1
1
$-1 + \sqrt{-2}$
$-1 - \sqrt{-2}$

(Notez que le produit des deux derniers eſt 3 :)

Donc il ſe faut reſouvenir d'obſerver tousjours cela : on pourroit dire à quoy ſert ces ſolutions qui ſont impoſſibles, je reſpond pour trois choſes, pour la certitude de la reigle generale, & qu'il ny a point d'autre ſolutions, & pour ſon utilité : l'utilité eſt facile, car elle ſert à l'invention des ſolutions de ſemblables equations comme on peut remarquer en l'arithmetique de Stevin, en la cinquieſme differ. du 71 probleme ; que s'il y

Source gallica.bnf.fr / Bibliothèque nationale de France

avoir une queſtion où la precedente ſe rencontre, & qu'au nombre de ſolution il faille adjouſter 1, & puis ayant quarré la ſomme & y adjouſté 2 : on auroit quatre facits, 6, 6, 0, 0, tellement que 6 ſeroit ſeul & unique facit, à l'excluſion de tout autre, dequoy on n'euſt jamais peu eſtre ſi certain ſans les ſuſdites ſolutions.

Par ce moyen on trouvera que jamais perſonne n'a reſoud les equations cy-devant avec toutes leurs ſolutions.

Exemple en Stevin.

En ladite cinquieſme difference du 71 probleme, page 320 de mon edition, ou 344 de la vieille, ſi 1 ③ eſt eſgale à 6 ② — 10 ① + 3, Stevin ne trouve que 3, & je trouve encor $1\frac{1}{1} + \sqrt{\frac{1}{4}}$ & encor $1\frac{1}{1} - \sqrt{\frac{1}{4}}$: Item plus haut ſi 1 ③ eſt eſgale à 6 ② — 12 ① + 8; Stevin trouve 2, & je trouve 2, 2, 2, tellement que je ſuis aſſeuré qu'il n'y a que celle-là de 2, & luy en eſtoit incertain : de meſme plus bas ſi 1 ③ eſt eſgale à 6 ② — 9 ① + 4 : Stevin trouve 4, & je trouve encor 1, 1. Item à la difference troiſieſme du probleme 69, page 293, de mon edition, ſi 1 ③ eſt eſgale à 7 ① — 6, Stevin trouve 2 & encor 1, & je dis qu'il y a encor — 3, leſquelles ſervent comme on voit en la cinquieſme difference du 71 probleme de Stevin, & le requiert à la fin du 70.

Touchant François Viete, qui ſurpaſſe tous ſes devanciers en l'algebre; on peut voir en ſon traité (*De Recognitione Equationum cap. 16. pag. 40. de ſyncryſi*;) où il dit que telle ſyncriſis eſt pour trouver ou colliger la mutuelle comparaiſon de deux equations correlatives : & il oublioit pour parler generalement de dire és plans, & pour les ſolides, de trois correlatives, &c. car en la page 54 & 44 : il ne trouve que deux ſolutions, (comme auſſi en beaucoup de lieu dans ſes livres) ſoit dit-il 124 ① — 1 ③ eſgale à 240 : Il ne trouve que 2 & 10, & je trouve encor — 12, car voicy les factions 0, — 124, — 240.

Ainſi qu'on peut donner trois noms aux ſolutions, veu qu'il y en a qui ſont plus que rien; d'autres moins que rien; & d'autres envelopées, comme celles qui ont des √ —, comme des √ — 3, ou autres nombres ſemblables.

On peut colliger pluſieurs choſes de ces Theoremes, premierement l'intelligence du nombre des ſolutions; ſecondement la nature des equations, qui eſt qu'icelles ont leurs termes compoſé des factions, & que toutes les queſtions n'ont autre nœud; tiercement comment il eſt facile de faire avoir, les poſant en ordre alterne avec les meſmes ſignes ainſi

1 ③ — 17 ① eſgales à 4 ② — 60

puis ſi l'on veut en ordre poſterieur tiré de là.

1 ③ eſgale à 4 ② + 17 ① — 60

Que ſi on trouve encor une ſolution d'icy comme 3; on pourra trouver les deux autres, faiſant de meſme que deſſus, on trouvera

1 ② eſgale à 1 ① + 20

Là où 1 ① vaudra 4 auſſi — 5, parquoy les quatre ſolutions requiſes de la premiere equation ſeront 2, 3, — 4, 5. & ainſi des autres: ſans chercher toutes les reigles imparfaites que Viette en a donné.

Il y a de la determinaiſon aux equations comme nous en avons fait mention cy-deſſus.

Soit 1 ② eſgale à 6 ① — 10 (impoſſible d'eſtre eſgal)

car la $\frac{1}{1}$ eſt 3
ſon quarré 9
avec — 10
— 1 duquel il faut extraire la √, ce qui n'eſt pas en la nature. donc ce 10 eſt trop, 9 eſtoit le plus haut.

Soit 1 ③ eſgale à 12 ① — 18 (impoſſible d'eſtre eſgal)
car le $\frac{1}{1}$ eſt 4 — 9 qui eſt $\frac{1}{2}$ de 18
ſon Cube 64 — 81 ſon quarré.

Et puis que 81 eſt plus que 64, l'equation eſt impoſſible & inepte: ce qui a auſſi eſté dit auparavant, donc 18 eſt trop, veu que 16 euſt eſté au plus haut.

Cecy eſt propre; 1 ③ eſgale à 3 ① — 2 en petits nombres.

Soit 1 ③ eſgale à 12 ② — 257 (ce qui n'eſt poſſible d'eſtre eſgal)
car les $\frac{2}{1}$ eſt 8
Son Cube 512
ſa $\frac{1}{1}$ eſt 256
avec — 257 ce nombre eſtoit au plus haut d'eſtre 256, parquoy 257 eſt trop.
— 1

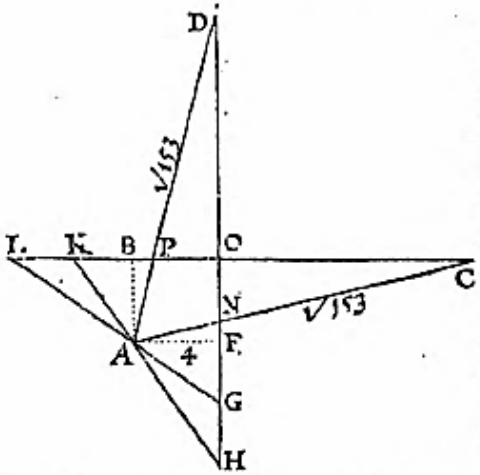
Cecy eſt propre 1 ③ eſgale à 3 ① — 4, & le 4 eſt au plus haut.

Source gallica.bnf.fr / Bibliothèque nationale de France

Soit 1 ④ eſgale à 12 ③ — 2189 (auſſi inepte)
car les $\frac{1}{4}$ eſt 9
ſon quarre-quarré 6561
ſon $\frac{1}{4}$ eſt 2187
avec — 2189 ce nombre eſt trop, eſtant 2187 il ſeroit au plus haut.

Iuſques icy nous n'avons encor expliqué à quoy ſervent les ſolutions par moins, quand il y en a. La ſolution par moins s'explique en Geometrie en retrogradant, & le moins recule, là où le + avance.

Probleme d'Inclinaiſon.



Soyent deux lignes droictes D G, B C, ſe couppant en angles droits en O, & indefinies, & du poinct A (dans la ligne qui couppe l'angle droit O en deux eſgalement, ainſi que A B O F eſt quarré, dont chacun coſté eſt 4) on mene une ligne A N C, ainſi que l'interceptе N C (entre les lignes données a angles droits D G, B C) ſoit √153, on demande la longueur de F N.

Ayant fait la poſition de F N 1 ①, on trouvera que 1 ④ ſera eſgale à 8 ③ + 121 ② + 128 ① — 256; & ainſi la valeur de 1 ① recevra quatre diverſes ſolutions.

1	FN	
16	FD	
— $4\frac{1}{2}$ + √$4\frac{1}{4}$	monſtrant le poinct G	du poinct F
— $4\frac{1}{2}$ — √$4\frac{1}{4}$	monſtrant le poinct H	

Aſſavoir monſtrant leſdits poincts G & H, comme ſi les diſtances F G, F H eſtoyent moins que rien, en retrogradant, prenant que F N, F D avancent, & F G, F H reculent en arriere, tellement donc que les interceptes C N, D P, G L, H K, tendent & s'enclinent au poinct A, faiſant chacune √153, ſelon le requis.

Et pour l'interpreter encor mieux, les deux ſolutions qui ſont moins que 0, ſe doivent changer, aſſavoir les ſignes.

viendra $4\frac{1}{2}$ — √$4\frac{1}{4}$ pour F G.
$4\frac{1}{2}$ + √$4\frac{1}{4}$ pour F H.

Leſquels il faut poſer au contraire de F N, F D, comme il eſt exprimé en la figure precedente : & ainſi le faudra-il entendre de toutes ſolutions par moins, qui eſt une choſe de conſequence en Geometrie, incogneuë auparavant.

S'enſuit auſſi la maniere de traicter les poſtpoſées quantitez, leſquelles ſervent de beaucoup à la reſolution des problemes. Car combien que par cy-devant on s'ayt ſervi des meſmes, ce n'a pas eſté avec un ſi grand eſclairciſſement, ce que j'ay mis icy pour finir le preſent traicté d'Algebre.

Des poſtpoſées quantitez en l'Algebre.

STevin & ſes devanciers comme Cardan, ſelon qu'il le cite és ſix Theoremes apres le 80e probleme de ſon Arithmetique, pag. 365 de la nouvelle edition, dit que l'invention de la poſtpoſée prime n'eſt pas encor trouvée, quand il y a un multinomie de ces poſtpoſées, & a ceſte fin il ſe ſert de quelques proportions qu'il dit avoir tiré du livre intitulé *Ars magna*, chap. 10. dudit Cardan; I'ay entrepris de monſtrer la facilité & la reſolution de ce qu'il dit n'eſtre encor legitimement trouvé, afin que telles choſes ne ſoyent doreſnavant plus incogneuës; Or pource que la marque de 1 ſec. ① pour poſtpoſée quantité ſignifiant 1 ①, ſecondement poſée eſt trop prolixe, je prendray A pour la ſeconde ①.

Queſtion du premier Theoreme.

Soyent 1 ① M ſec. ① + 6 ſec. ① eſgales à 3 ①.
c'eſt à dire ſelon noſtre ſuppoſition, qui eſt plus claire.

A ① + 6 A eſgales à 3 ①

Diviſons tant le ſubject, que le comparé par 1 ① + 6

alors A ou bien 1 ſec. ①. ſera eſgale a $\frac{3\,①}{1\,① + 6}$

Queſtion

Source gallica.bnf.fr / Bibliothèque nationale de France