ISAAC BARROW
& LE THEOREME FONDAMENTAL DU CALCUL INFINITESIMAL

Patrick Perrin, IREM de Reims

Avant que Newton et Leibniz n'en fassent la pierre angulaire du calcul différentiel et intégral, Isaac Barrow avait mis en évidence dans ses *Lectiones Geometricae* le lien de réciprocité entre le calcul de l'aire sous une courbe et le calcul de la tangente. L'étude de quelques extraits de ces leçons nous permettra de montrer l'originalité de la contribution d'Isaac Barrow à l'histoire de l'analyse.

LE THEOREME FONDAMENTAL

Les notations du calcul différentiel réduisent ce théorème à une formule lapidaire : $\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$, masquant sa signification première. Ce que nous exprimons par l'énoncé classique : sous l'hypothèse de continuité de la fonction *f*, la fonction qui donne l'aire sous la courbe représentative de *f* a pour dérivée la fonction *f* elle-même, les anciens géomètres le résumaient en disant que le calcul des aires relève de la méthode inverse des tangentes. Cette formulation a l'avantage de mettre l'accent sur l'existence d'un lien profond entre la résolution de deux problèmes géométriques à priori indépendants.

Le premier de ces problèmes, le calcul des aires, est aussi ancien que la géométrie. Les premiers résultats concernant les figures élémentaires se trouvent dans les tablettes de l'ancien empire babylonien et dans les papyrus du moyen empire égyptien. Mais il faut attendre les mathématiques grecques pour voir apparaître une méthode générale de quadrature, la méthode d'exhaustion. Après Eudoxe et Euclide, Archimède fait un usage si remarquable de celle-ci qu'elle est encore une référence pour les mathématiciens du 17^{e} siècle. Poursuivant les travaux d'Archimède, ceux-ci développent différentes méthodes de quadrature qu'ils jugent plus efficaces pour la découverte de nouveaux résultats, mais ceci se fait au détriment de la rigueur démonstrative.

Le second de ces problèmes, la détermination des tangentes à une courbe, remonte également aux mathématiques grecques. La première définition de la notion de tangence qui nous soit parvenue se trouve en effet au début du livre III des *Eléments* d'Euclide, livre consacré aux propriétés du cercle :

> *Définition 2 : Une droite qui, rencontrant un cercle et prolongée, ne le coupe pas, est dite être tangente au cercle.* [1]

Quelques pages plus loin la proposition III.16 donne une caractérisation de la tangente à un cercle en termes de convexité et vient préciser la nature du contact entre le cercle et sa tangente :

[1] Euclide. *Les éléments*. Traduction Bernard Vitrac. P U F Paris 1990-1994., t.1, p.387

La droite menée à angles droits avec le diamètre du cercle à partir d'une extrémité tombera à l'extérieur du cercle, et dans le lieu compris entre la droite et la circonférence, une autre droite ne sera pas intercalée; […] [2]

C'est cette conception de la tangence, généralisée à d'autres courbes que le cercle, que l'on retrouve chez Apollonius dans son étude des tangentes aux coniques et chez Archimède dans sa détermination de la tangente à la spirale. Les mathématiciens du 17e siècle vont enrichir considérablement le concept en mettant en évidence d'autres propriétés de la tangente à une courbe. Ainsi certains d'entre eux développent un point de vue cinématique en utilisant la composition des mouvements pour déterminer la tangente à une courbe, par exemple Roberval avec son *axiome, ou principe d'invention* :

La direction du mouvement d'un point qui décrit une ligne courbe, est la touchante de la ligne courbe en chaque position de ce point-là. Le principe est assez intelligible, & on l'accordera facilement dès qu'on l'aura considéré avec un peu d'attention. [3]

D'autres tel Descartes préfèrent mettre en avant un point de vue algébrique. Dans celui-ci le critère de contact de deux courbes est la coïncidence de deux points d'intersection : étant donnés une courbe C et un point fixe A de cette courbe, une ligne quelconque variable (droite ou cercle par exemples), qui coupe la courbe C en A et en un second point variable M, devient tangente à la courbe C lorsque le point M coïncide avec A. Enfin avec les méthodes infinitésimales la tangente acquerra la propriété supplémentaire de se confondre avec la courbe au voisinage du point de contact.

Mais posséder des méthodes de calcul pour les résoudre n'est sans doute pas suffisant pour pressentir le lien entre les problèmes de quadrature et de tangente. Encore faut-il être amené à se poser les bonnes questions. Nous allons donner deux exemples pour illustrer notre propos, le premier concerne le problème inverse des tangentes (trouver une courbe dont la tangente en un point quelconque vérifie des conditions données) et le second la rectification des courbes.

Pour l'historien des sciences Paul Tannery, René Descartes et Florimond De Beaune auraient aperçu de façon claire l'identité du problème inverse des tangentes avec celui des quadratures. Il l'affirme dans une note relative à un passage de la lettre de Descartes à De Beaune datée du 20 février 1639 dont voici un extrait :[4]

Je ne croy pas qu'il soit possible de trouver generalement la converse de ma regle pour les tangentes, ny de celle dont se sert Monsieur de Fermat non plus, bien que la pratique en soit en plusieurs cas plus aisée que la mienne. Mais on en peut déduire à posteriori des Theoremes, qui s'estendent à toutes les lignes courbes qui s'expriment par une équation, en laquelle l'une des quantitez x ou y n'ait point plus de deux dimensions, encore que l'autre en eust mille ; & je les ay trouvez presque tous en

---

2 ibid. p.423-424

3 Roberval, Gilles Personne de. *Observations sur la composition des mouvements et sur le moyen de trouver les tangentes des lignes courbes* in Mémoires de l'Académie Royale des Sciences, tome VI, p.24

4 Dans cette lettre Descartes donne la solution d'un problème posé par De Beaune dont on s'apercevra par la suite qu'il se ramène à celui des courbes à sous tangente constante.

cherchant cy-devant vostre deuxième ligne courbe ; mais pour ce que je ne les écrivois que dans les brouillons que je n'ay pas gardez, je ne vous les puis envoyer. [5]

Il est possible, comme Paul Tannery le fait, d'interpréter ce passage en disant que Descartes aurait établi des théorèmes concernant des intégrations de fonctions rationnelles (ou de leur racine carrée) obtenues comme inverses de différentiation, mais on aurait bien aimé avoir sous les yeux les brouillons de Descartes.

Les problèmes de rectification ont également joué un rôle dans l'établissement d'un lien entre quadrature et tangente par le fait que la rectification d'une courbe se ramène à la quadrature d'une autre courbe, principe général découvert entre 1657 et 1659 par plusieurs mathématiciens. Ainsi James Gregory en 1668, dans la démonstration d'une propriété relative à la rectification des courbes[6], est-il conduit à établir le théorème fondamental pour le cas qui l'intéresse et on pourrait lui attribuer la paternité de la découverte (ce que font certains historiens) s'il avait réalisé la généralité et l'importance de ce qu'il venait de trouver.

Quoi qu'il en soit, il semble qu'avant Barrow aucun énoncé général du théorème fondamental n'ait été formulé explicitement.

ISAAC BARROW

Né à Londres en 1630, fils d'un commerçant drapier, Isaac Barrow termine ses études au Trinity College de Cambridge. Il y est recruté comme assistant en 1649, avant de partir en 1655 pour un grand voyage d'études à travers l'Europe qui dure quatre ans. Il obtient en 1660 le poste de professeur de grec au Trinity College, qu'il cumule deux ans plus tard avec celui de professeur de géométrie au Gresham College de Londres. En mai 1663 il est élu parmi les premiers membres de la Royal Society, l'été suivant il laisse son poste de professeur de grec pour occuper la nouvelle chaire de mathématiques créée grâce à une donation de Henry Lucas[7]. En 1669 il cède sa place à un de ses anciens étudiants devenu un jeune collègue très prometteur, Isaac Newton, pour se consacrer à l'étude de la théologie. L'année suivante il est nommé par le roi Charles II chapelain à Salisbury, puis il retourne à Cambridge en 1673 à la tête du Trinity College. Il décède lors d'un voyage à Londres en 1677.

Isaac Barrow est l'auteur d'une traduction des *Eléments* d'Euclide en latin (1655) et en anglais (1660) qui servira de référence pendant un demi siècle, il a également traduit en latin les œuvres d'Archimède, les livres I à IV des coniques d'Apollonius et les sphériques de Theodosius. Ses autres publications scientifiques sont des compilations de ses cours lorsqu'il occupait la chaire lucasienne. Les plus originales sont les *Lectiones Opticae* et les *Lectiones Geometricae* parues respectivement en 1669 et 1670. Les leçons d'Optique traitent de problèmes théoriques tels que la détermination des foyers des lentilles et surfaces sphériques

[5] Descartes René. *Œuvres*, pub. par C. Adam et P. Tannery, Correspondance tome II. Paris Vrin 1988, p 514.

[6] Il s'agit de la proposition 6 de *Geometriae Pars Universalis* que l'on peut traduire à peu près en ces termes : *Trouver une courbe dont la longueur soit avec l'abscisse dans le même rapport que l'aire sous une courbe donnée avec un rectangle de hauteur donnée et de base cette même abscisse*.

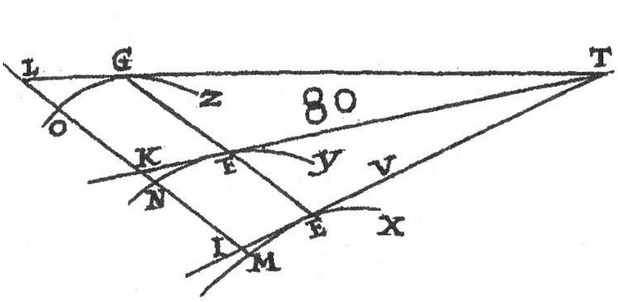
[7] La chaire lucasienne de mathématiques de l'université de Cambridge fait toujours partie des postes universitaires les plus prestigieux. Parmi ses titulaires, outre Isaac Barrow et Isaac Newton, on peut citer Charles Babbage, George Gabriel Stokes, Paul Dirac, Stephen Hawking.

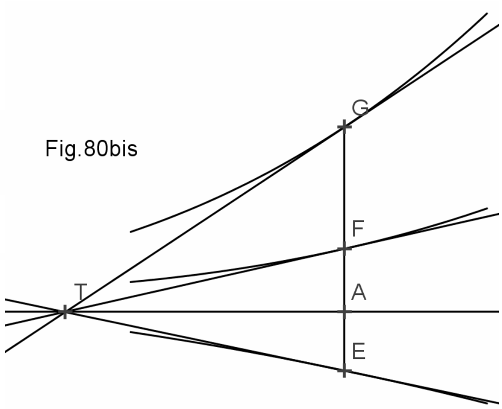
ou la construction de l'image d'un objet après réflexion ou réfraction. Elles ont certainement influencé les recherches de Newton dans ce domaine.[8]

LES LECTIONES GEOMETRICAE

Les cours de géométrie de Barrow s'intéressent aux propriétés des courbes, ils forment le traité le plus abouti sur le calcul des tangentes et des aires de tous les travaux du 17[e] siècle précédant le calcul différentiel. La pensée de Barrow est géométrique, il accorde peu d'attention aux procédures analytiques car il estime que l'algèbre ne fait pas vraiment partie des mathématiques. Pour donner une première idée de la richesse du contenu de ces leçons nous allons prendre trois exemples tirés des huitième et neuvième leçons.

La proposition 6 de la leçon VIII considère trois courbes XEM, YFN et ZGO (cf. figure 80)[9] liées de telle sorte que, pour toute droite quelconque EFG parallèle à une direction donnée, le rapport EG/EF soit constant. Et elle affirme que si les tangentes aux courbes XEM et ZGO respectivement aux points E et G se coupent en T alors la droite FT sera tangente en F à la courbe YFN. Il est facile de déduire de cette propriété le résultat usuel concernant la dérivée du produit d'une fonction par une constante, il suffit de considérer le cas particulier où la courbe XEM est l'axe des abscisses. D'autre part en prenant le rapport EG/EF égal à 2 et en considérant la parallèle à l'axe des abscisses passant par le point de concours T des tangentes, on obtient la dérivée de la demi somme de deux fonctions (cf. figure 80 bis).[10]





La proposition 9 de la leçon VIII donne, exprimé en termes de sous tangentes, un résultat équivalent à la dérivée de l'inverse d'une fonction. Dans la figure 83, les courbes YFN et XEM sont telles que le produit des ordonnées FD et ED est toujours constant, alors si la tangente en F à YFN coupe l'axe des abscisses en S et la tangentes en E à XEM coupe ce même axe en T, on a l'égalité des sous tangentes : DT = DS.[11]

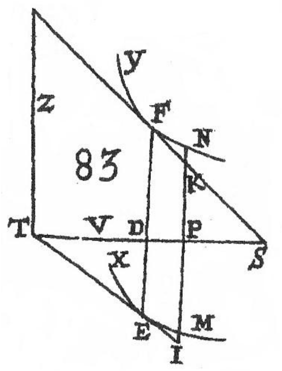
---

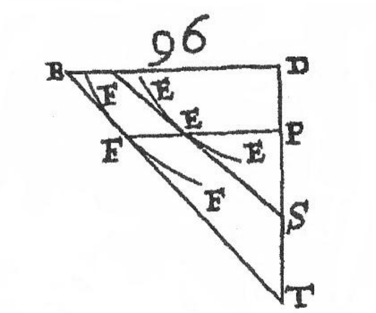
[8] Dans la préface des *Lectiones Opticae* Barrow remercie Newton pour son travail de révision. Il n'est pas impossible que Newton ait joué le même rôle pour les *Lectiones Geometricae*.

[9] Toutes les figures, à l'exception de la figure 80 bis, de la Galande et de la figure du pb VII des fluxions sont des reproductions extraites des planches originales des *Lectiones Geometricae* [source gallica.bnf.fr/Bibliothèque nationale de France]. Le lecteur peu habitué des conventions de représentation de cette époque trouvera quelques explications en page 14 à propos de la figure 109.

[10] Et par conséquent la dérivée de la somme de deux fonctions.

[11] Supposons que les courbes YFN et XEM admettent respectivement pour équation y = f(x) et y = g(x) avec





La proposition 5 de la leçon IX donne, toujours exprimé en termes de sous tangentes, un résultat équivalent à la dérivée du carré d'une fonction. Barrow indique que si deux courbes EEE et FFF (fig.96) sont telles que les ordonnées PE de la première varient comme le carré des ordonnées PF de la seconde et si la tangente en F à la seconde coupe l'axe des abscisses en T et la tangente en E à la première coupe ce même axe en S, alors les sous tangentes vérifient la relation : TP = 2SP. Puis il généralise au cas de la puissance nième d'une fonction.

La caractéristique la plus intéressante de tous ces énoncés est évidemment leur généralité. Il ne s'agit pas seulement d'expliquer comment tracer la tangente de telle ou telle courbe[12] mais de donner un résultat valable pour toute une famille de courbes.

Paradoxalement le résultat le plus souvent cité des *Lectiones Geometricae* est sa méthode analytique de détermination des tangentes utilisant le triangle différentiel que Barrow lui-même affirme avoir ajouté sur les conseils d'un ami en appendice à la fin de la dixième leçon. La raison en est qu'elle est souvent considérée comme précurseur du calcul différentiel :

> *Ce mathématicien célèbre […] publia en 1669 ses Lectiones Geometricae, ouvrage rempli de recherches profondes sur la dimension et les propriétés des figures curvilignes. Nous nous en tiendrons à cet éloge ; car nous ne pourrions, sans tomber dans des détails prolixes, donner une idée plus développée de ce livre savant. Il ne falloit rien moins que les nouveaux calculs pour effacer tant d'inventions excellentes. Nous nous arrêterons seulement à une, savoir sa méthode des tangentes, à cause de sa liaison avec le calcul différentiel ou des fluxions.*[13]

> *The Geometricae Lectiones are full of curious methods of determining the areas and tangents of curves, many of which are very close anticipations of Newton's methods. The most noted of these is the method of drawing tangents to curves, given in Lect. X. Art. XIV. This method is justly held to be an anticipation of the Differential Calculus, and to approach very near to it.* [14]

---

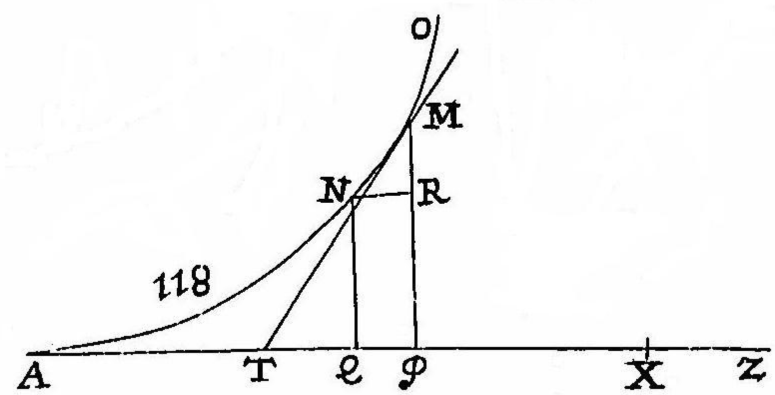
g(x) = k/f(x). On vérifie que : $g'(x) = \frac{g(x)}{\overline{\overline{TD}}} = \frac{k}{f(x)} \times \frac{1}{-\overline{\overline{SD}}} = \frac{k}{f(x)} \times \frac{-f'(x)}{f(x)}$

[12] Barrow traite également de nombreux exemples mais comme application de ses énoncés généraux.

[13] Montucla J. E. *Histoire des Mathématiques Tome Second*. Paris an VII, Part. IV. Liv. VI. p 359.

[14] *The mathematical work of Isaac Barrow*, edited by W. Whewell. Cambridge 1860, Preface p.xii.

Donnons ici une rapide description de cette méthode qui repose, pour l'essentiel, sur les mêmes principes que celle de Fermat mais plus clairement explicités. La démarche de Barrow pour trouver la tangente en un point M de coordonnées (q ; m) d'une courbe est la suivante : il considère un point N ($q - e$; $m - a$) sur la courbe infiniment proche de M (figure 118). Il établit une équation qui traduit l'appartenance du point N à la courbe dans laquelle il néglige les puissances de a et de e d'ordre supérieure à un (règle 1). Puis il substitue la sous tangente PT = t à la place de NR = e et MP = m à la place de MR = a, en arguant du fait que l'on peut confondre un arc infiniment petit de la courbe avec un segment de sa tangente (règle 3). Cette substitution se justifie par le fait que les longueurs des côtés du triangle TPM sont proportionnelles à celles du triangle NRM. L'égalité $\frac{MP}{PT} = \frac{MR}{NR}$ qui en découle, montre à quel point Barrow a approché le calcul différentiel, puisque traduite en termes actuels elle se lit : le coefficient directeur de la tangente en M est égal à $\frac{dy}{dx}$.



Pour illustrer la méthode de Barrow nous allons reprendre son troisième exemple : le calcul de la tangente à la galande[15]. Nous suivrons ses calculs en y ajoutant quelques commentaires explicatifs.

La droite AZ est donnée ainsi que la longueur du segment AX (cf figure 118). La courbe AMO est telle que, si d'un point M quelconque on trace MP perpendiculaire à AZ, alors $AP^3 + PM^3 = AX \times AP \times PM$. Posons AX = b, AP = x et AQ = $x - e$; de même PM = y et QN = $y - a$. [16]

Rejetant les termes superflus comme indiqué dans la règle 1, il vient :

$$AQ^3 = x^3 - 3x^2e \ ; \ QN^3 = y^3 - 3y^2a \quad \text{et} \quad AQ \times QN = xy - ey - ax.$$

D'où l'on tire l'équation (puisque N appartient à la courbe AMO) :

$$x^3 - 3x^2e + y^3 - 3y^2a = bxy - bey - bax.$$

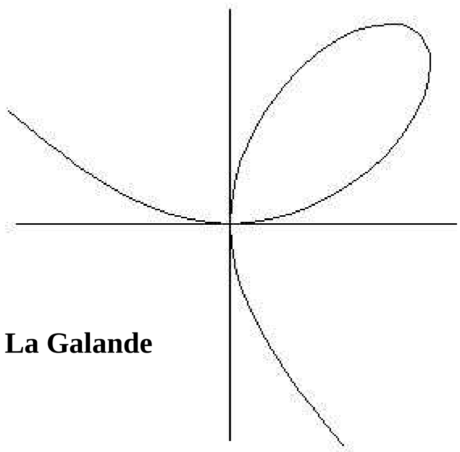
[15] La galande est plus connue sous le nom de folium de Descartes. Celui-ci la proposa pour la première fois en 1638 dans une lettre à Mersenne en la présentant comme un exemple de courbe dont les tangentes ne pouvaient pas être déterminées par la méthode de Fermat, affirmation hâtive que Fermat ne tarda pas à réfuter. Roberval qui avait déterminé la forme de la partie de la courbe situé dans le premier quadrant l'avait appelé pour cela galand, ce qui signifiait nœud de ruban.

[16] Pour faciliter la lecture, nous avons légèrement modifié les notations de Barrow qui utilise f à la place de x et m à la place de y.

Après avoir éliminé les termes égaux $x^3 + y^3$ et bxy comme indiqué dans la règle 2,[17] il vient : $bax - 3y^2a = 3x^2e - bey$.

Et en remplaçant a par y et e par t = PT (règle 3) on obtient :

$$bxy - 3y^3 = 3x^2t - byt, \qquad \text{soit } t = \frac{bxy - 3y^3}{3x^2 - by}.$$



La Galande

Il est temps maintenant de nous intéresser au théorème fondamental qui fait l'objet de la proposition 11 de la dixième leçon. Celle-ci est un peu perdue parmi d'autres propositions traitant de problèmes de tangentes, cependant son importance n'a pas échappé à son auteur ainsi que le prouve le paragraphe qui lui sert d'introduction :

> *J'avais pensé insérer ici plusieurs propositions de cette sorte* [18]*; mais je juge que ceci suffit pour indiquer la manière d'après laquelle il est possible, sans l'inconvénient du Calcul, de rechercher les tangentes aux courbes et en même temps de démontrer les constructions* [19]*. J'ajouterai cependant un ou deux théorèmes qui, ainsi qu'on le verra, sont tout à fait généraux et ne peuvent être négligés.* [20]

Le raisonnement suivi par Barrow est purement géométrique à la manière des mathématiciens grecs et s'appuie sur la définition euclidienne de la tangente, droite dont tous les points sont situés du même côté de la courbe. Pour en faciliter la présentation nous avons découpé le texte en trois parties. Le texte original en latin se trouve à la fin de cet article.

---

[17] La règle 2 consiste à éliminer les termes égaux en raison de la relation caractéristique de la courbe.

[18] Barrow vient de donner dans le début de la leçon X plusieurs résultats concernant la détermination des tangentes à certaines courbes dont la définition fait intervenir une longueur d'arc.

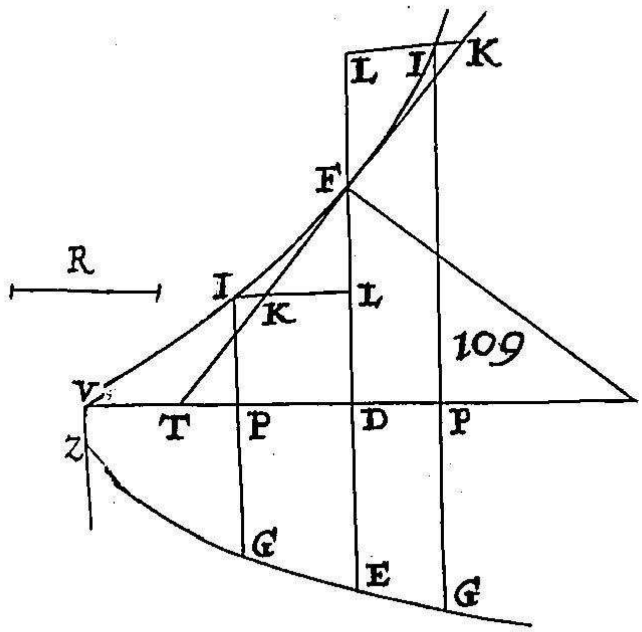
[19] Cette phrase ne laisse aucune ambiguïté quant à la préférence de Barrow pour les méthodes géométriques.

[20] Barrow Isaac. *Lectiones Geometricae*. Londres, J. Dunmore, 1670, p78.

LA PROPOSITION 11 DE LA LEÇON X

PREMIERE PARTIE : L'ENONCE

XI. Soit une courbe ZGE dont l'axe est VD ; nous supposons en premier lieu que les perpendiculaires (VZ, PG, DE) appliquées à celle-ci croissent de manière continue quelconque depuis la valeur initiale VZ (fig.109) ; soit de même la courbe VIF telle que, une droite quelconque EDF ayant été tracée perpendiculairement à VD (coupant les courbes aux points E, F, [et] VD elle-même en D), le rectangle [construit] à partir de DF et d'une certaine [longueur] R donnée soit toujours égal à l'espace correspondant délimité par VDEZ ; en outre soit DE : DF = R : DT ; et que la droite TF soit tracée, celle-ci touche la courbe VIF. [21]



Remarquons que conformément à l'usage de l'époque seul l'axe des abscisses est représenté. Les quantités variables étudiées sont positives et peuvent être représentées de chaque côté de l'axe[22] . La situation est habilement représentée par deux courbes , la première est tracée en dessous de l'axe des abscisses VD, la seconde qui représente la fonction donnant l'aire sous la courbe de la première est tracée au dessus de l'axe des abscisses, il faut donc imaginer deux demi-axes des ordonnées, l'un dirigé vers le haut pour la courbe VIF, l'autre dirigé vers le bas pour la courbe ZGE. Barrow reste attaché au respect de l'homogénéïté des grandeurs, ainsi l'aire VDEZ est égale au produit des longueurs DF et R que l'on peut considérer comme l'unité si l'on souhaite retrouver des résultats familiers. La présence en double sur la figure des points I, K, L, P et G s'explique par le fait que Barrow doit distinguer deux cas de figure dans sa démonstration.

[21] ibidem

[22] On ne parle pas encore de fonction, cette notion ne deviendra centrale qu'à partir d'Euler.

Barrow va donc montrer que la droite passant par F qui a pour coefficient directeur DE/R est tangente (ou touchante suivant l'usage du 17e siècle) à la courbe VIF, ce qui est bien le résultat attendu.

DEUXIÈME PARTIE : LA PREUVE

En effet que soit pris un point quelconque I sur la courbe VIF (celui-ci d'abord avant le point F, du côté du [point] initial V) et que soient tracées par celui-ci les droites IG parallèle à VZ et KL parallèle à VD (qui coupent les courbes représentées comme on le voit) alors $\frac{LF}{LK} = \left(\frac{DF}{DT} = \right)\frac{DE}{R}$ [23]*, et par conséquent* $LF \times R = LK \times DE$.

D'autre part (d'après la nature attribuée à ces courbes) $LF \times R$ *est égal à l'espace PDGE* [24]*; donc* $LK \times DE = PDEG < DP \times DE$ [25]*. D'où* $LK < DP$ *; ou* $LK < LI$.

Inversement que le point I soit pris quelconque, après le point F, et que les points restants soient comme auparavant ; il sera maintenant établi très clairement par un discours semblable que $LK \times DE = PDEG > DP \times DE$*, d'où on aura maintenant* $LK > DP$*, ou LI.* [26]

De ceci il est évident que la droite TKFK toute entière est située à l'intérieur (ou à l'extérieur) de la courbe VIFI. [27]

C'est donc très clairement la définition euclidienne de la tangente à une courbe qui est invoquée dans cette démonstration.

TROISIEME PARTIE : CAS DES ORDONNEES DECROISSANTES

Les mêmes choses étant posées pour tout le reste, si les ordonnées VZ, PG, DE, etc. décroissent continûment, le même raisonnement conduit à la même conclusion ; la seule différence, c'est que dans ce cas (contrairement au précédent) la courbe VIF a sa concavité tourner vers l'axe VD. [28]

Corol. On remarquera que $DE \times DT$ *est égal à l'espace VDEZ.* [29]

---

[23] La première égalité provient de la similitude des triangles FLK et FDT. La seconde est une conséquence de la définition du point T donnée dans la partie énoncé.

[24] $LF \times R = (DF - PI) \times R = \mathcal{Aire}(VDEZ) - \mathcal{Aire}(VPGZ) = \mathcal{Aire}(PDEG)$.

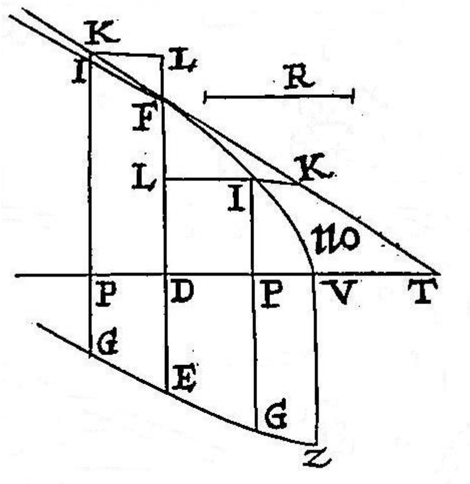
[25] Car les ordonnées des points de la courbe ZGE sont croissantes.

[26] Dans ce cas de figure on a : $LF \times R = (IP - DF) \times R = \mathcal{Aire}(VPGZ) - \mathcal{Aire}(VDEZ) = \mathcal{Aire}(PDEG)$ et $\mathcal{Aire}(PDEG) > PD \times DE$ (car les ordonnées sont croissantes) d'où $LK \times DE > DP \times DE$ ie $LK > LI$

[27] Barrow Isaac. *Lectiones Geometricae*. Londres, J. Dunmore, 1670, p78.

[28] cf. figure 110

[29] ibidem



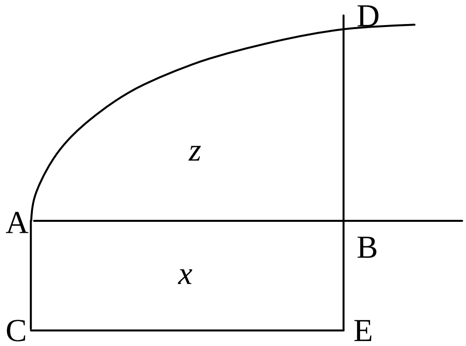


Fig fluxions pb VII

Pour illustrer le cas des ordonnées décroissantes, la figure (n°110) utilisée pour représenter la courbe ZEG est inchangée mais on la parcourt de la droite vers la gauche. A noter que Barrow met en évidence le lien entre la concavité de la courbe VIF et le sens de variation de la quantité DE (qui est proportionnelle au coefficient directeur de la tangente). Le corollaire est immédiat, son intérêt apparaîtra dans la proposition suivante dont nous parlerons un peu plus loin.

On ne peut qu'être admiratif devant la simplicité des moyens mis en œuvre par Barrow dans la démonstration du théorème fondamental. A aucun moment il n'a besoin des nouvelles méthodes de calcul des tangentes de son époque. Il n'est alors pas immédiat de déduire de sa proposition que les quadratures peuvent être calculées par recherche de primitives et c'est sans doute la raison pour laquelle cette proposition ne sera pas reprise par la suite sous cette forme. D'ailleurs dans la proposition 19 de la leçon XI Barrow prend la peine de démontrer un résultat équivalent à $\int_a^b f(t)dt = F(b)$ lorsque $F' = f$ et $F(a) = 0$ en utilisant d'autres outils : son triangle différentiel et sa propre méthode de quadrature.[30]

Il est intéressant de regarder rapidement ce que devient le théorème fondamental chez son successeur Isaac Newton. Dans sa *méthode des fluxions* (dont la rédaction est achevée en 1671) celui-ci préfère à l'élégante démonstration géométrique de Barrow, une interprétation cinématique qui montre une fois encore l'efficacité du langage des fluxions dans la mise en évidence d'une propriété.

> *Problème VII : Trouver autant de courbes que l'on voudra dont les aires soient exprimées par des équations finies.*
>
> *I. Au sommet A de l'abscisse AB d'une courbe, soit élevée la perpendiculaire AC =* 1, *& soit CE parallèle à AB ; soit aussi DB une ordonnée perpendiculaire qui rencontre CE en E, & la courbe AD en D* (cf. figure ci-dessus) *; concevez que les aires ACEB & ADB sont produites par le mouvement des droites BD & BE le long de la ligne AB ; les*

[30] La méthode de quadrature de Barrow consiste à inscrire entre la courbe et son axe des rectangles en nombre illimité et à affirmer que l'aire sous la courbe diffère de la somme des aires des rectangles du plus petit degré possible (« minime »)

augmentations de ces aires ou leurs fluxions seront toujours comme ces lignes BD & BE [31]*; ainsi le parallélogramme ACEB ou AB* $\times 1$ *= x, & l'aire de la courbe ADB = z ; les fluxions* $\dot{x}$ *&* $\dot{z}$ *seront comme BE & BD ; de sorte que faisant* $\dot{x}$ *= 1 = BE,* $\dot{z}$ *sera = BD.*

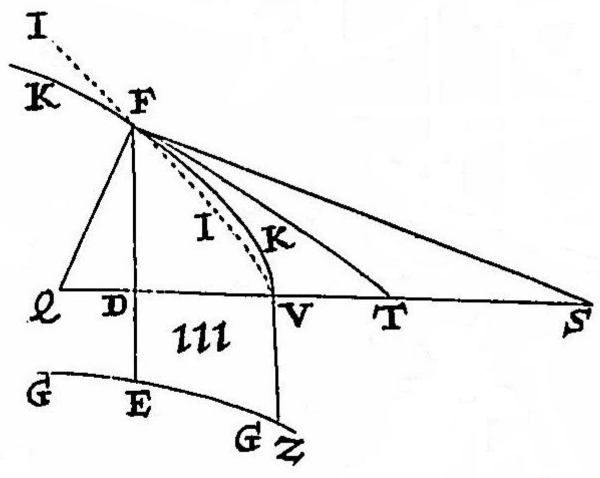
II. Si donc on prend une équation quelconque pour déterminer la relation de x & de z, on en tirera la valeur de $\dot{z}$ *, & l'on aura ainsi deux équations, dont l'une déterminera la courbe & l'autre son aire.* [32]

Et Newton utilisera exactement la même explication pour justifier que *la Résolution de ce Problème (Trouver l'Aire d'une Courbe proposée quelconque) dépend de celle du Prob. 2. où par la Relation donnée des Fluxions, on trouve celle des Fluentes.* [33]

UNE APPLICATION DE LA PROPOSITION 11

À la suite de la proposition 11, Isaac Barrow expose un théorème relatif à une propriété de la normale à une courbe.

XII. De là se déduit ce théorème : soient deux lignes (courbes) quelconques ZGE, VKF (fig.111) liées de telle façon que, une droite quelconque EDF étant appliquée à leur axe commun VD, le carré de DF soit toujours égal au double de l'espace VDEZ ; d'autre part que DQ soit pris égal à DE, et que la droite FQ soit tracée ; celle-ci sera perpendiculaire à la courbe VKF. [34]



Cet énoncé mérite quelques explications. Supposons que les courbes VKF et ZGE admettent respectivement pour équation $y = f(x)$ et $y = g(x)$ avec par hypothèse $f^2(x) = 2\int_0^x g(t)dt$, alors d'après le théorème fondamental $f'(x)\times f(x) = g(x)$. Or le produit

---

[31] Pendant un intervalle de temps indéfiniment petit *o*, quand l'abscisse *x* = AB augmente d'une quantité $\dot{x}o$, l'aire du parallélogramme ABEC augmente de $\dot{x}o \times$ BE ou $\dot{x}o$ et l'aire sous la courbe ADB de $\dot{x}o \times$ BD.

[32] Newton Isaac. *La méthode des fluxions et des suites infinies,* traduit par M. de Buffon. Paris 1740, Pb VII, art. 1 & 2 (réed. Blanchard, Paris 1994, p 86).

[33] ibidem Pb IX, art.1 (p.93).

[34] Barrow Isaac. *Lectiones Geometricae*. Londres, J. Dunmore, 1670, p78.

$f'(x)\times f(x)$ est égal à la longueur (algébrique) de la sous normale de la courbe VKF, d'où l'égalité DQ = DE. De plus comme cette propriété est vraie pour tout point F de la courbe VKF, l'espace VDEZ représente l'intégrale prise entre les abscisses de V et de D de la fonction qui donne la sous normale ; on peut alors déduire de ce théorème que cette intégrale est égale à la moitié de FD² (qui est le carré de l'ordonnée du point D). En fait ce deuxième énoncé fait l'objet de la proposition 1 de la leçon XI, que Barrow établira de manière indépendante grâce à son triangle différentiel et sa méthode de quadrature. Mais prenons le temps d'apprécier la démonstration de la proposition 12 dans laquelle Barrow va faire appel à quelques résultats antérieurs que nous avons cités.

Celui-ci introduit une troisième courbe VIF (donc passant par les points V et F) et dont les ordonnées varient comme les carrés des ordonnées de la courbe VKF. Ce qui revient pour nous à dire qu'elle admet pour équation ($y=\dfrac{f^2(x)}{FD}$). D'autre part il introduit les points T et S sur l'axe VD tels que la droite FT soit tangente en F à VIF et la droite FS soit tangente en F à VKF. D'après la proposition 5 de la leçon IX, SD = 2TD. Mais les ordonnées de la courbe VIF varient comme l'espace VDEZ donc, d'après le corollaire de la proposition 11, DE×DT = VDEZ. On en déduit immédiatement que DE×SD = (2VDEZ =) FD². D'où DQ×SD = FD² ; ce qui suffit pour établir que l'angle QFS est droit.

Il est intéressant de noter que ce problème relatif à la sous normale va être repris par Gottfried Wilhelm Leibniz dans son article *De geometria recondita et analysi indivisibilium atque infinitorum* paru en juin 1686 dans le but de montrer l'efficacité de son nouveau calcul différentiel dans la résolution du problème inverse des tangentes. Le passage cité répond à un article de John Craig qui a cherché à utiliser le calcul de Leibniz pour résoudre un théorème de Barrow dans lequel on peut reconnaître la proposition XI.1 [35] . Il est célèbre pour ce que Leibniz y dit de la réciprocité des opérateurs ∫ et *d*.

> *Dans le problème cité, voici comment je procède : soit x l'ordonnée, y l'abscisse, p la distance que j'aie définie, entre la perpendiculaire et l'ordonnée ; ma méthode montre d'emblée qu'on aura : pdy = xdx, ce que M. Craig a bien su en déduire ; une fois cette équation différentielle convertie en équation sommatrice, il vient* $\int pdy=\int xdx$. *Mais d'après ce que j'ai montré dans ma méthode des tangentes, on voit que* $d(\frac{1}{2}xx)=xdx$, *et donc inversement* $\frac{1}{2}xx=\int xdx$ *(car à l'exemple des puissances et des racines dans le calcul ordinaire, dans mon calcul, sommes et différences, c'est-à-dire ∫ et d sont réciproques). Nous avons donc* $\int pdy=\frac{1}{2}xx$, *ce qu'il fallait démontrer.* [36]

[35] Voici la formulation donnée par Leibniz : *la somme des distances entre l'ordonnée et les normales à une courbe, mesurées sur l'axe et appliquées sur lui, est égale à la moitié de la dernière coordonnée au carré.* [ibid. note suivante]

[36] Leibniz G. W. *Naissance du calcul différentiel, 26 articles des Acta eruditorum*, trad. par Marc Parmentier. Paris, J.Vrin, 1995, p.137 & 138.

Pour conclure Isaac Barrow était sans nul doute un fin connaisseur des nouvelles méthodes de calcul de ses contemporains ainsi que des œuvres des anciens géomètres grecs et ses *Lectiones Geometricae* nous apparaissent comme une des dernières tentatives pour concilier la rigueur de la pensée mathématique grecque et l'efficacité du calcul infinitésimal[37]. Sans aller jusqu'à affirmer comme James Mark Child que « *Isaac Barrow was the first inventor of the Infinitesimal Calculus* »[38], cet auteur d'une traduction en anglais des *Lectiones Geometricae* étant sans doute emporté par l'enthousiasme légitime éprouvé pour son sujet d'étude, il nous faut reconnaître que l'œuvre mathématique de Barrow mériterait d'être réexaminée.

Bibliographie

Barrow Isaac. *Lectiones Geometricae*. Londres, J. Dunmore, 1670.

Barrow Isaac. *The mathematical work of,* edited for Trinity College by W. Whewell. Cambridge University Press 1860.

Bourbaki Nicolas. *Eléments d'histoire des mathématiques*. Masson, Paris, 1984.

Child James Mark. *The geometrical lectures of Isaac Barrow, translated with notes and proofs and a discussion on the advance made therein on the work of his predecessors in the infinitesimal calculus*. Chicago & London, The Open Court Publishing Company, 1916.

Descartes René. *Œuvres*, publiées par Charles Adam et Paul Tannery, Correspondance tome II mars 1638 décembre 1639. Paris, Librairie Philosophique J.Vrin, 1988.

Euclide. *Les éléments*. Traduction et commentaires par Bernard Vitrac. Presses Universitaires de France Paris 1990-1994.

Gomes Teixeira Francisco. *Traité des courbes spéciales remarquables planes et gauches* (3 tomes). Coïmbre, Imprimerie de l'Université, 1908 (réed. Gabay, 1995).

Leibniz Gottfried Wilhelm. *Naissance du calcul différentiel*, *26 articles des Acta eruditorum*, introduction, traduction et notes par Marc Parmentier. Paris, Librairie Philosophique J.Vrin, 1995.

Montucla Jean Etienne. *Histoire des Mathématiques, Nouvelle édition Tome Second*. Chez Henri Agasse libraire à Paris, 1799.

Newton Isaac. *La méthode des fluxions et des suites infinies,* traduit par M. de Buffon. Paris 1740 (réed. Blanchard, Paris 1994).

Roberval, Gilles Personne de. *Divers ouvrages* in Mémoires de l'Académie Royale des Sciences depuis 1666 jusqu'à 1699, t. VI, Compagnie des Libraires Paris 1730.

[37] Isaac Newton fournira un autre exemple de cette démarche lorsqu'il exposera dans les *principes mathématiques de la philosophie naturelle* une autre conception de son calcul des fluxions, qu'il nomme méthode des premières et dernières raisons. Il est permis d'y voir l'influence de Barrow.

[38] Child James Mark. *The geometrical lectures of Isaac Barrow, translated with notes and proofs* … Chicago & London, The Open Court Publishing Company, 1916, preface p.vii.

LECTIONES Geometricæ:

In quibus (præſertìm)
GENERALIA *Curvarum Linearum* SYMPTOMATA
DECLARANTUR.

Auctore ISAACO BARROW, Collegii S S. *Trinitatis* in Acad. *Cantab.* Socio, & *Societatis Regiæ* Sodale.

Οἱ φύσει λογιστικοὶ εἰς πάντα τὰ μαθήματα, ὡς ἔπος εἰπεῖν, ὀξεῖς φαίνονται· οἵ τε βραδεῖς, ἂν ἐν τούτῳ παιδευθῶσι καὶ γυμνάσωνται, κἂν μηδὲν ἄλλο ὠφεληθῶσιν, ὅμως εἴς γε τὸ ὀξύτεροι αὐτοὶ αὑτῶν γίγνεσθαι πάντες ἐπιδιδόασιν. Plato de Repub. VII.

130

LONDINI,
Typis *Gulielmi Godbid*, & proſtant venales apud *Johannem Dunmore*, *M. D C. L X X.*

Source gallica.bnf.fr / Bibliothèque nationale de France

Hujuſmodi plura quædam cogitaram hîc inſerere; verùm hæc exiſtimo ſufficere ſubindicando modo, juxta quem, citra *Calculi moleſtiam*, *curvarum tangentes* exquirere licet, unáque conſtructiones demonſtrare. Subjiciam tamen unum aut alterum non aſpernanda, ut videtur *Theoremata* perquam generalia.

XI. Sit linea quæpiam Z G E, cujus axis V D; ad quam imprimìs applicatæ perpendiculares (V Z, P G, D E) ab initio V Z continuè utcunque creſcant; ſit item linea V I F talis, ut ductâ quâcunq; rectâ E D F ad V D perpendiculari (quæ *curvas* ſecet punctis E, F, ipſam V D in D) ſit ſemper *rectangulum* ex D F, & deſignatâ quâdam R æquale *ſpatio* reſpectivè *intercepto* V D E Z; fiat autem D E. D F :: R. D T; & connectatur recta T F; hæc curvam V I F continget.

Fig. 109.

Sumatur enim in linea V I F punctum quodpiam I (illud primò ſupra punctum F, verſus initium V) & per hoc ducantur rectæ I G ad V Z, ac K L ad V D parallelæ (quæ lineas expoſitas ſecent, ut vides) éſtque tum L F. L K :: (D F. D T ::) D E. R; adeóque L F × R = L K × D E. Eſt autem (ex præſtituta linearum iſtarum natura) L F × R æquale ſpatio P D E G; ergò L K × D E = P D E G ⊐ D P × D E. Unde eſt L K ⊐ D P; vel L K ⊐ L I.

Fig. 110.

Rurſus accipiatur quodvis punctum I, infra punctum F, reliquáq; fiant, utì priùs; ſimiliſque jam planè diſcurſu conſtabit fore L K × D E = P D E G ⊏ D P × D E, unde jam erit L K ⊏ D P, vel L I. E quibus liquidò patet totam rectam T K F K intra (ſeu extra) curvam V I F I exiſtere.

Iiſdem quoad cætera poſitis, ſi *ordinatæ* V Z, P G, D E, *&c.* continuè decreſcant, eadem concluſio ſimili ratiocinio colligetur; unicum obvenit *Diſcrimen*, quòd in hoc caſu (contra quàm in priore) linea V I F concavas ſuas axi V D obvertat.

Corol. Notetur D E × D T æquari ſpatio V D E Z.

XII. Exindè deducitur hoc *Theorema*: Sint duæ lineæ quævis Z G E, V K F ita relatæ, ut ad communem ipſarum axem V D applicatâ quâvis rectâ E D F, ſit ſemper quadratum ex D E æquale *duplo ſpatio* V D E Z; ſumatur autem D Q = D E, & connectatur F Q; hæc curvæ V K F perpendicularis erit.

Fig. 111.

Concipiatur enim linea V I F, per F tranſiens, talis qualem mox attigimus (cujus ſcilicet ad V D applicatæ ſe habeant ut ſpatia VDEZ; hoc eſt ut quadrata ex applicatis à curva V K F in præſente hypotheſi) lineámque