

Fac-similé numérisé de la brochure

Un fruit bien défendu

Les élèves face à un problème du XII^e siècle

Auteur : Groupe « Histoire des mathématiques » de l'IREM de Reims

Date de publication : Décembre 1988

Éditeur : IREM de Reims, Moulin de la Housse, BP 1039, 51687 Reims Cedex 2

Numéro IREM : Re 25



Un fruit

Bien

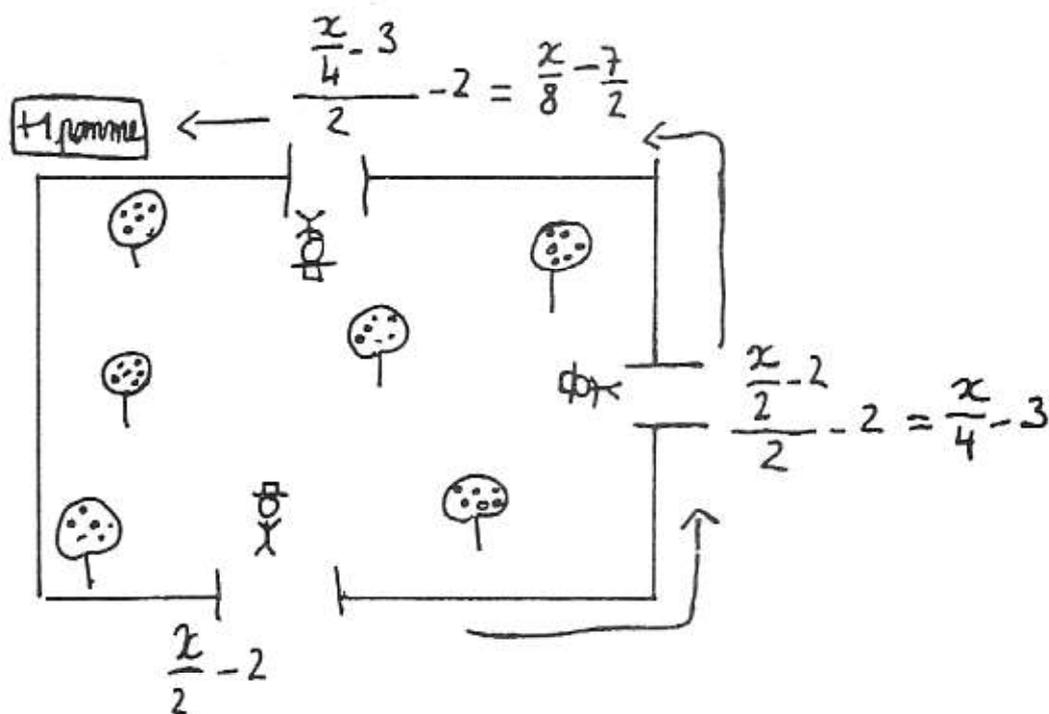
Défendu

IREM DE REIMS

Moulin de la Housse

51100 REIMS

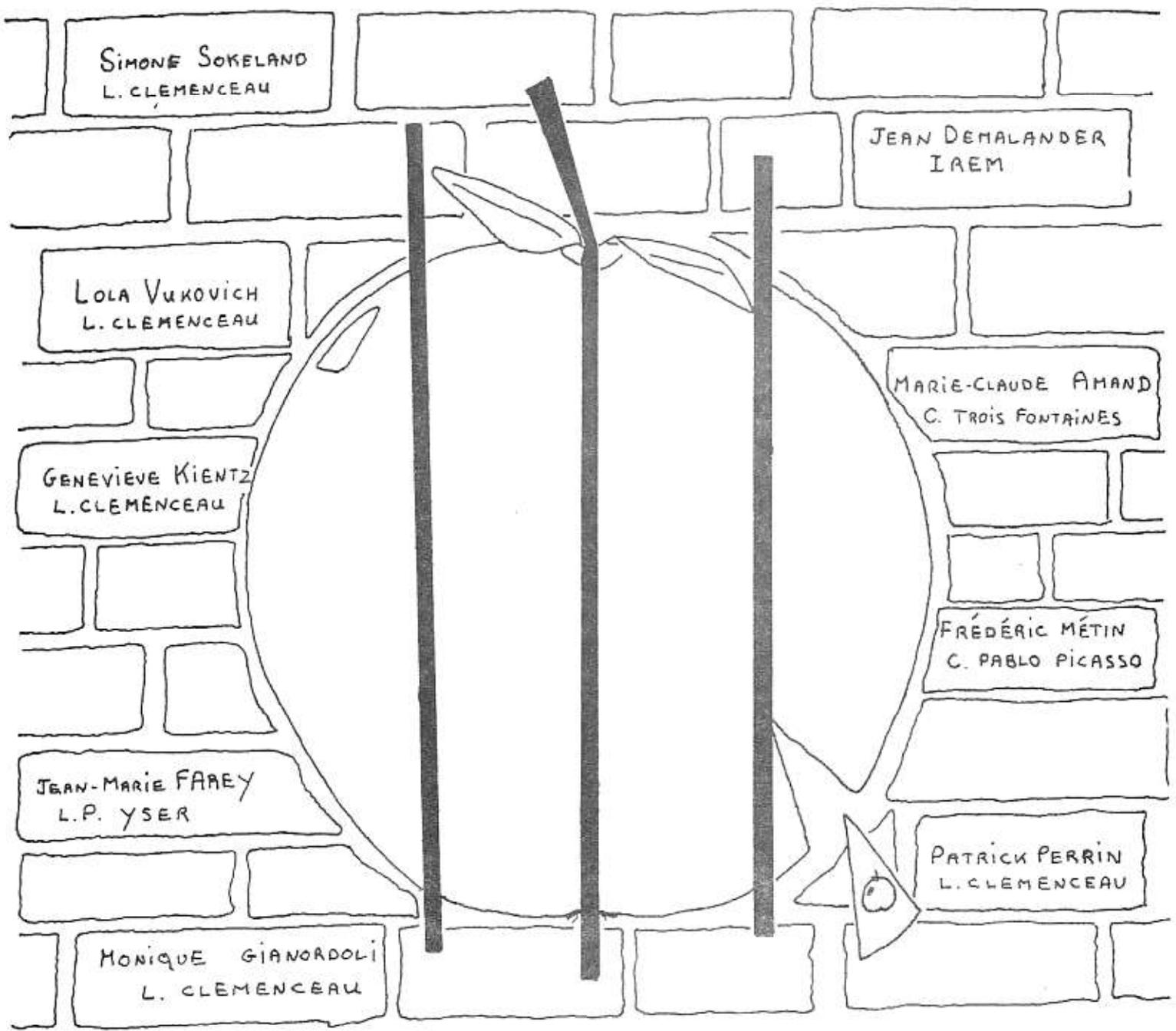
LES ELEVES FACE A UN PROBLEME DU XII^es



Groupe IREM HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES

1987 - 1988

Académie de Reims



J.C.F

Faire en sorte que les élèves s'investissent effectivement dans un travail de recherche ; leur faire comprendre qu'il faut argumenter pour valider ou non un résultat et qu'une démonstration ne consiste pas uniquement en un jeu de pur respect des formes ; soit des objectifs difficiles à atteindre dans notre enseignement.

C'est sur cette problématique que travaille l'équipe "Histoire des Maths" de l'IREM de Reims. Le document qu'elle présente est le témoignage d'une expérience visant à provoquer une rupture propice à l'approche de ces objectifs : qu'apporte la confrontation des élèves avec des méthodes et rédactions non conformes à leurs habitudes ; sont-ils amenés à réagir et à s'investir réellement dans le problème proposé ?

Si oui, outre son indéniable intérêt culturel, l'histoire des mathématiques nous fournirait aussi de précieux instruments pour notre enseignement. Dans cette perspective, on comprendra que ce document n'est pas un aboutissement, mais une étape nécessaire dans le travail de recherche que mène l'équipe ; étape dont, me semble-t-il, on occulte trop souvent la relation.

Bertrand Turoc

Directeur de l'IREM de Reims

C'est en juillet 1984 que s'est tenue, dans la ville du Mans, la première université d'été sur l'Histoire des Mathématiques. Une année après débutait un stage rémois, inscrit au Plan Académique de Formation dans le cadre de l'I.R.E.M.: le premier stage sur l'Histoire des Mathématiques dans l'Académie de Reims. Aujourd'hui une centaine de professeurs a pu participer à de tels stages dans notre Académie. Etait-il possible d'aller plus loin ?

Un groupe de professeurs rémois a pu se réunir à plusieurs reprises pendant l'année scolaire 87/88 , pendant des périodes d'une ou deux journées consécutives . Ce groupe s'est préoccupé de mettre les élèves en présence de problèmes ou de textes historiques, afin de les faire travailler sur ceux-ci. Nous avons en effet remarqué que de nombreuses brochures I.R.E.M. étaient parues, mais qu'un nombre assez restreint de ces dernières abordaient la question des réactions et démarches des élèves.

Et si on dit: un homme est entré dans un verger et il y a cueilli des fruits. Mais le verger avait 3 portes, gardées chacune par un gardien. Cet homme donc partagea les fruits avec le 1^{er} et lui en donna 2 de plus, puis il partagea avec le 2^{ème} et lui en donna 2 de plus, enfin partagea avec le 3^{ème}, lui en donna 2 de plus, et il sortit en ayant seulement 1 fruit. Combien de fruits a-t-il cueillis?

Le chapitre de la numération te propose de placer 100 dans le plateau. Partage avec le 1^{er} (gardien) en lui donnant 2 (fruits) supplémentaires. Il t'en reste 48 ; partage avec le 2^{ème} et donne lui en 2 de plus, il t'en reste 22; enfin partage avec le 3^{ème} et donne lui en 2, et il t'en reste 9. Mais compare avec le reste 1. Tu t'es trompé de 8, en excédent. On appelle cela la première erreur.

Ensuite prends dans le second plateau le nombre 200, partage avec le 1^{er} (gardien) en lui donnant 2 (fruits) de plus. Il t'en reste 98 ; partage avec le 2^{ème} et donne lui en 2 de plus, il t'en reste 47 ; enfin partage avec le 3^{ème} et donne lui en 2, et il t'en reste 21 1/2, en plus. Mais compare avec le reste 1. Tu t'es trompé de +20 1/2. Ceci est la deuxième erreur.

Multiplie la par 100 qui est dans le premier plateau et on obtient 2050 ; ensuite multiplie ce qui est dans le second plateau par l'erreur du premier, ce qui revient à multiplier 200 par 8, et cela fera 1600. Tu retranches alors le plus petit du plus grand, soit 1600 de 2050 ; il reste 450. Enfin retranche une erreur de l'autre, c'est-à-dire 8 de 20 1/2, il reste 12 1/2. Divise alors 450 par ce nombre, et tu obtiens 36. C'est donc le nombre de fruits qu'il a cueillis.

Cet extrait est intitulé "le chapitre des fruits" (Capitulum de pomis) [8]p. 336 à 338.

"Liber augmenti et diminutionis vocatus numeratio divinationis..", attribué à Abraham Ben Ezra, né à Tolède vers 1090 et mort à Rome (?) en 1167. Ben Ezra a voyagé beaucoup, de l'Égypte à Londres et a écrit entre autres le livre de l'Unité, le livre du Nombre. Lui doit-on aussi le "Liber augmentis et diminutionis..."? les avis sont partagés.

(d'après la brochure de l'I.R.E.M. de Toulouse:
Equations du premier degré. Méthode de fausse position)

Parmi ceux que nous avons étudiés, un thème a particulièrement retenu notre attention: *la double fausse position*. Sur ce sujet un document figure dans la remarquable brochure de l'I.R.E.M. de Toulouse, "Equations du premier degré. Méthode de fausse position", document extrait du "Liber augmenti et diminutionis vocatus numeratio divinationis" attribué à Abraham Ben Ezra (1090-1167)

L'un d'entre nous ayant fait travailler sur ce texte ses élèves de première année de B.E.P. géomètre-topographe, différentes activités ont été ensuite proposées, à partir du même texte, dans une classe de quatrième, une classe de troisième, et quatre classes de seconde aux profils divers.

Dans chacune de ces classes, le document a été brièvement présenté aux élèves. Les exercices qui l'accompagnaient avaient pour but d'aider à la compréhension du texte et à la résolution du problème.

Pourquoi le problème de Ben Ezra?

Il fait appel à des connaissances acquises dans différentes classes par les élèves et permet d'observer celles qui sont réinvesties.

Plusieurs méthodes permettent de résoudre ce problème, aucune n'étant a priori meilleure qu'une autre.

Le texte fournit sans justification une solution que les élèves peuvent accepter ou rejeter au profit d'une de leur choix.

La méthode peut être éventuellement appliquée à d'autres situations du même type, ou généralisée, ou encore justifiée. Jusqu'où les élèves iront-ils pour se convaincre de sa validité ?...

Qu'attendions-nous, en fait, des élèves ?

- Que, placés dans une situation inhabituelle, ils mettent en oeuvre des démarches scientifiques.

- Qu'ils se livrent à une analyse critique de la solution proposée (exercice assez rare par ailleurs...)

- Qu'ils réinvestissent des outils et connaissances antérieurement acquis(?)

Nous présenterons d'abord les réactions des élèves à l'activité, puis leurs méthodes de résolution du problème de Ben Ezra, enfin leurs critiques vis à vis de celui-ci. Vous pouvez trouver à la fin de la brochure une description des divers scénarios et dispositifs pédagogiques mis en place.

Nous avons choisi de faire souvent apparaître à l'intérieur de la rédaction des déclarations orales ou écrites d'élèves.

Ces témoignages inciteront peut-être certains de nos collègues à placer leurs élèves dans de telles situations, suffisamment riches et ouvertes pour permettre de repérer des phénomènes qui auraient pu passer inaperçus.

TABLE DES MATIERES

REACTIONS DES ELEVES FACE A L'ACTIVITE	6
METHODES UTILISEES PAR LES ELEVES	10
LES ELEVES FACE A LA SOLUTION DE BEN EZRA	20
CONCLUSION	32
ANNEXES : DISPOSITIFS PEDAGOGIQUES	35

REACTION DES ELEVES FACE A L'ACTIVITE

Dans un premier temps, le texte fait l'objet d'une lecture personnelle, le plus souvent silencieuse, mais parfois des commentaires font apparaître une certaine perplexité :

« *J'ai rien compris* » (en quatrième)

« *Qu'est-ce qu'il faut faire ?* » (en seconde)

ou même une inquiétude :

« *Est-ce que ce sera noté ?* » (en seconde)

Après quelques clarifications, les élèves se mettent à chercher avec intérêt; idées, questions, discussions, le débat s'installe, des réflexions fusent:

«*C'est un fou* »

«*Sa méthode est nulle* »

«*Ca doit être faux* »

Un élève de quatrième a l'idée de vérifier si 36 est la bonne réponse et se propose de «voir comment il a fait».

En troisième nombreux sont ceux qui essaient de transcrire la méthode en langage mathématique; l'un d'entre eux confond vingt demis et vingt et demi, un autre demande le sens du mot "excédent" qu'il confond avec "excès"

En B.E.P. les élèves sont enthousiastes et se lancent dans le travail .

Les élèves de seconde s'intéressent d'abord à la résolution du problème, sans manifester beaucoup de curiosité envers la méthode de Ben Ezra .

D'une manière générale, les plus "faibles" s'accrochent et fournissent un important travail personnel, ils ont parfois les meilleures idées; cet intérêt déborde même le cadre de la classe: «*j'y ai pensé hier soir*», «*j'ai voulu en parler à un copain, il n'a rien compris et pourtant il est en seconde!..*». Certains ont par ailleurs tenu à exprimer par écrit une réflexion personnelle, ce qui ne leur avait pas été demandé.

Un autre point positif concerne la participation. Des élèves habituellement silencieux osent donner leur opinion, poser des questions; ils reprennent confiance en eux. Une élève de troisième prend carrément la direction de son groupe, alors qu'elle attend d'ordinaire que le travail soit fait. Quelques-uns évoquent les "Mille et une nuits", d'autres associent le problème à telle ou telle devinette, l'imagination et la fantaisie ne sont pas exclues!

En fait les élèves s'expriment...

Ce pourrait être d' :

- à la nature de l'activité: travail de groupe sur un texte, rédigé en langage courant, prêtant à discussion, avec des questions "ouvertes" .

- au sujet abordé: les élèves se permettent de formuler des critiques sur ce texte ancien, d'auteur inconnu au panthéon des mathématiciens, sans rapport apparent avec le programme scolaire ni avec les connaissances exigibles à leur niveau; un groupe, sur la base d'un calcul faux, est même très heureux de prendre la méthode de Ben Ezra en défaut à l'aide d'un contre-exemple.

- au comportement du professeur, surtout observateur de la classe, privilégiant les initiatives et encourageant les critiques.

Il faut cependant noter que l'enthousiasme est un peu plus mesuré en seconde, où l'on a peut-être davantage l'habitude de travailler à plusieurs lors des séances hebdomadaires de T.P. , ce qui enlève l'attrait de l'exceptionnel; ou bien alors n'y voit-on pas de rentabilité immédiate? (pas de devoir noté, pas d'exercice classique du programme qui pourrait resservir)

Finalement les élèves nous ont paru dans l'ensemble plus à l'aise, désireux de bien faire, parfois soucieux de confier un certain désarroi face aux mathématiques.

Voici quelques-unes de leurs réactions...

ce genre d'exercice permet de mieux comprendre l'énoncé du problème, c'est plus explicite. Je lire un texte écrit en français, que de lire une phrase brève avec des formules. Une fois que l'on a compris le texte (l'énoncé), tout s'accroche ensemble avec une autre méthode d'année, je n'aurais peut-être pas compris et rédigé les questions

de trouver
Ce qui m'a plu c'est tout une suite de calcul avec des inconnues bien que cela soit un peu difficile et en arriver à une solution avec des lettres et des chiffres. Il est parfois plus facile de s'exprimer mathématiquement que de s'exprimer en français.

1) ce qui m'a plu dans ce travail, c'est que l'on se fait pas sauter et que ça change du travail habituel;

2) ce qui m'a déplu c'est la méthode employée qui est beaucoup trop longue et surtout le vocabulaire employé pour résoudre ce système

Ce qui meurt plus, c'est que c'est un système qui change des Mathématiques que l'on fait d'habitude, c'est de montrer que nous à notre époque, nous pouvons réussir à trouver la solution d'un problème qui a été posé dans le passé.

4) - Retrouver l'authenticité des textes des problèmes du monde de l'Égypte.

- Savoir que les choses qui nous font actuellement ou été réfléchies et résolues bien avant nous

Ce qui m'a plus dans l'histoire des Maths c'est la recherche de la logique et des cultures récentes par rapport à un texte ancien. Mais c'est difficile de trouver la logique Plaque placée par l'habitude de ce genre de travail

.. Nous pensons que ce genre de problème fait travailler notre réflexion et met en œuvre notre logique. En tout cas nous avons apprécié. Ce problème nous a fait travailler en groupe et nous a inconsciemment "forcé" à travailler.

Ce qui est intéressant, c'est le travail de groupe où nous pouvons nous échanger certaines idées.

deux essais d'élèves de seconde:

Calculs x :

$$\left[\left[\left[(x+2) \times 2 \right] + 2 \right] \times 2 + 2 \right] \times 2 = x.$$

donc $x=36$.

Le procédé de cette méthode est de prendre le problème par la fin.

À sa sortie, l'homme possède 1 pomme
* JP en donne 2 de plus au troisième gardien
après avoir partagé

$$\Rightarrow \begin{aligned} 1+2 &= 3 \\ 3 \times 2 &= 6 \end{aligned}$$

JP possédait donc 6 pommes avant la rencontre du troisième gardien.

* JP en donne 2 de plus au deuxième gardien
après avoir partagé.

$$\Rightarrow \begin{aligned} 6+2 &= 8 \\ 8 \times 2 &= 16 \end{aligned}$$

JP possédait donc 16 pommes avant la rencontre avec le deuxième gardien.

* JP en donne deux de plus au premier gardien après avoir partagé sa cueillette.

$$\Rightarrow \begin{aligned} 16+2 &= 18 \\ 18 \times 2 &= 36 \end{aligned}$$

JP a donc cueilli 36 pommes.

Une remarquable tentative de généralisation d'un élève de quatrième:

III) Pour résoudre, à notre époque plus facilement ce problème nous pourrions commencer par la fin, c'est à dire à partir du chiffre 1 en faisant toute l'opération inverse.

$$\left. \begin{array}{l} 1 + 2 = 3 \\ 3 \times 2 = 6 \\ 6 + 2 = 8 \\ 8 \times 2 = 16 \\ 16 + 2 = 18 \\ 18 \times 2 = 36 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 3^{\text{eme}} \text{ gardien} \\ 2^{\text{eme}} \text{ gardien} \\ 1^{\text{er}} \text{ gardien} \end{array}$$

Résultat: 36

Cette méthode est valable pour tous les autres problèmes dont on donne le résultat final

La deuxième méthode recueille les faveurs de la majorité des élèves qui la connaissent...

Question 1:

$$\frac{\left(\frac{x}{2} - 2\right) - 2}{2} - 2 = 1$$

$$\frac{\left(\frac{x}{2} - 2\right) - 2}{2} = 3$$

$$\frac{\left(\frac{x}{2} - 2\right) - 2}{2} = 6$$

$$\frac{\left(\frac{x}{2} - 2\right) - 2}{2} = 8$$

$$\frac{x}{2} - 2 = 16$$

$$\frac{x}{2} = 18$$

$$x = 36$$

L'homme a cueilli 36 fruits

④ oui! Je peux déterminer une méthode plus simple que j'appellerais "méthode algébrique".

Soit x = le nombre de pommes.

- 1 $\rightarrow \frac{x}{2} - 2$: 1^{er} partage avec le 1^{er} jardin
 2 $\rightarrow \frac{x}{4} - 1 - 2$: 2^{ème} partage avec le 2^{ème} jardin
 3 $\rightarrow \frac{x}{8} - \frac{1}{2} - 1 - 2 = 1$: 3^{ème} partage avec le 3^{ème} jardin

$$\frac{x}{8} = 4 + \frac{1}{2}$$

$$x = 8 \left(4 + \frac{1}{2}\right)$$

$$x = 36$$

Donc, l'homme a récolté 36 pommes.

Mais cette mise en équation est souvent laborieuse ...

Soit x le nombre de pommes.
 Il y a trois jardins et P. l'homme partage les fruits avec le premier en lui en donnant deux en plus puis il partage avec le second avec deux en plus et idem pour le troisième alors on pose:

$$1 = \left(\frac{\left(\frac{x - \frac{x}{2}}{2} \right) - 2}{2} \right) - 2$$

$$1 = \left(\frac{\left(\frac{\frac{x}{2} - \frac{x}{2} - \frac{4}{2}}{2} \right) - 2}{2} \right) - 2$$

$$1 = \left(\frac{\left(\frac{\frac{x-4}{2}}{2} \right) - 2}{2} \right) - 2$$

$$1 = \frac{\left(\frac{x-4}{2} \times \frac{1}{2} \right) - 2}{2} - 2$$

$$1 = \frac{\frac{x-4}{4} - \frac{8}{4}}{2} - 2$$

$$1 = \frac{\frac{x-12}{4}}{2} - 2$$

$$= \frac{x-12}{4} \times \frac{1}{2} - 2$$

$$1 = \frac{x-12}{8} - \frac{16}{8}$$

$$\frac{8}{8} = \frac{x-28}{8}$$

$$8 = x - 28$$

$$0 = x - 36$$

$$x = 36$$

$$\boxed{\text{Donc } x = 36}$$

Et P. l'homme a cueilli 36 pommes.

On choisit x le nombre de pommes que l'homme a en départ.

Quand l'homme rencontre le premier gardien son nombre de pommes est divisé par 2, et on en soustrait 2 car il en a donné 2 de + au gardien donc il lui en reste 2 de moins.

$$\text{Nb de pommes} = \frac{x}{2} - 2$$

Quand il rencontre le 2nd, il se passe la même chose mais son nombre initial de pommes est de $\frac{x}{2} - 2$ donc

$$\begin{aligned} \text{Nb de pommes} &= \frac{\frac{x}{2} - 2}{2} - 2 \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{x}{2} - 2 \right) - 2 = \frac{x}{4} - 1 - 2 = \frac{x}{4} - 3. \end{aligned}$$

Quand il rencontre le 3^{ème} il se passe la même chose mais son nb initial de pommes est alors de $\frac{x}{4} - 3$

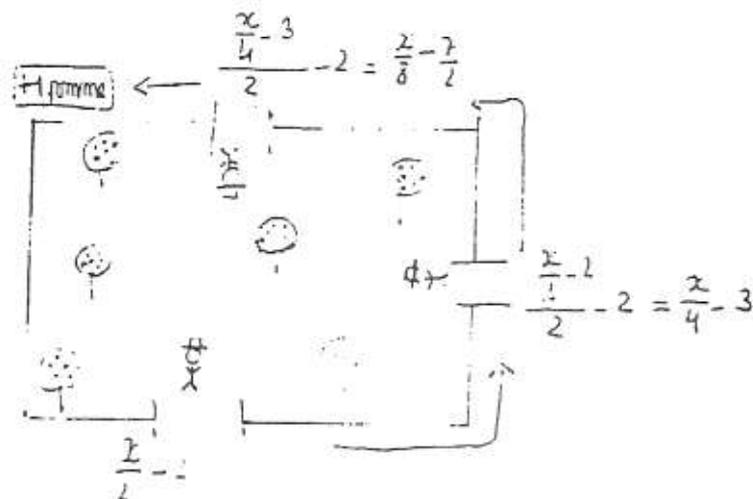
$$\begin{aligned} \text{Nb de pommes final} &= \frac{\frac{x}{4} - 3}{2} - 2 \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{x}{4} - 3 \right) - 2 = \frac{x}{8} - \frac{3}{2} - 2 \\ &= \frac{x}{8} - \frac{3}{2} - \frac{4}{2} \\ &= \frac{x}{8} - \frac{7}{2} \end{aligned}$$

Et comme on sait que le nb de pommes au départ est de 1 pomme donc on pose l'équation $\frac{x}{8} - \frac{7}{2} = 1$

$$\frac{x}{8} - \frac{7}{2} = 1 \quad ; \quad \frac{x}{8} = 1 + 3,5 \quad ; \quad x = 4,5 \times 8$$

$$x = 36$$

Donc le nb^{de} de pommes qu'il a cueilli est de 36



...et parfois infructueuse:

$$\begin{array}{l} 1/2 x \dots + 2 \\ 1/ x \dots + 2 \\ 1/2 x \dots + 2 = 1. \end{array}$$

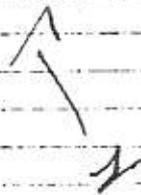
Et le premier il donne $1/2 x$ ~~$+ 2$~~
et le deuxième $1/2$ de $1/2 x$
et le troisième $1/2$ de $1/2$ de $1/2 x$.

3

~~$1 + x = 2$~~

~~$1 + x$~~

$$x/2$$



La troisième méthode est utilisée par quelques groupes dans chaque classe de seconde ...

* On peut également résoudre ce problème par des équations :

m = nombre initial de fruits
 x = nombre de fruits restant après le 1^{er} gardien
 y = "
 z = "
 t = "

$$x = \frac{m}{2} - t ; y = \frac{x}{2} - t ; z = \frac{y}{2} - t$$

$$y = \left(\frac{m}{2} - t\right) \times \frac{1}{2} - t ; y = \frac{m}{4} - 3$$

$$z = \left(\frac{m}{4} - 3\right) \times \frac{1}{2} - t ; z = \frac{m}{8} - \frac{7}{2}$$

$$z = 1 ! \quad \frac{m}{8} - \frac{7}{2} - 1 = 0$$

$$\frac{m}{8} - \frac{7}{2} - \frac{2}{2} = 0$$

$$\frac{m}{8} = \frac{9}{2} ; m = \frac{9}{2} \times 8 = \frac{72}{2} = 36$$

x : nombre de fruits au départ.

y : nombre de fruits après le partage avec le 1^{er} gardien.

z : nombre de fruits après le partage avec le 2^{ème} gardien.

t : nombre de fruits après le partage avec le 3^{ème} gardien.

$$\begin{cases} x = 2(y+2) \\ y = 2(z+2) \\ z = 2(t+2) \\ t = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2(y+2) \\ y = 2(z+2) \\ z = 6 \\ t = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2(y+2) \\ y = 16 \\ z = 6 \\ t = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 36 \\ y = 16 \\ z = 6 \\ t = 1 \end{cases}$$

7) pour le troisième gardien :

$$\text{on a } x_3 = \left(\frac{x_2}{2} + 2\right) = 1$$

$$x_3 - \frac{x_2}{2} - 2 = 1$$

$$\frac{2x_3 - x_2}{2} = 3$$

$$\frac{x_2}{2} = 3$$

$$x_2 = 6$$

pour le deuxième gardien :

$$\text{on a } x_2 = \left(\frac{x_1}{2} + 2\right) = 6$$

$$\frac{2x_2 - x_1}{2} = 6 + 2$$

$$\frac{x_1}{2} = 8$$

$$x_1 = 16$$

pour le 1^{er} gardien :

$$\text{on a } x_1 = \left(\frac{x_0}{2} + 2\right) = 16$$

$$\frac{x_0}{2} = 16 + 2$$

$$x_0 = 36$$

il avait 36 fruits

mais un élève de troisième y recourt également, quoique les systèmes n'aient pas été étudiés préalablement :

$$1^{\text{er}} \text{ gardien : } (x : 2) + 2 = y$$

$$2^{\text{e}} \text{ gardien : } (y : 2) - 2 = w$$

$$3^{\text{e}} \text{ gardien : } (w : 2) - 2 = 1$$

donc si on repart à l'envers on a :

$$w = 1 + 2 \times 2 = 6$$

$$y = 6 + 2 \times 2 = 16$$

$$x = 16 + 2 \times 2 = 36$$

Quelques brefs commentaires...

Faut-il s'étonner que la méthode arithmétique disparaisse au fur et à mesure des études, alors que la méthode algébrique devient une sorte de réflexe ?

Dans ce problème, la première est aussi performante sinon plus que la seconde. L'emploi de celle-ci serait-il lié à un conditionnement ?

La méthode arithmétique subsiste chez des élèves catalogués comme "faibles" en mathématiques ,mais aussi chez de "très bons" élèves.

La lecture de certaines copies(cf p 16) permet de constater que le recours à un système d'équations n'est qu'une étape intermédiaire dans le processus de formalisation du problème.

La perplexité est grande...

Beaucoup cherchent à mettre la méthode en défaut:

À première vue cette méthode ne me paraît pas juste, c'est pour cela que je vais essayer de démontrer qu'elle est fautive en me basant sur mes propres chiffres et en la mettant à l'épreuve pour éliminer les chances du hasard, pour la vérifier.

Question : est-il possible de trouver le même résultat (36) en ayant pas les mêmes nombres dans le 1^{er} et le 2^e plateau.

- Si l'on prend 300 dans le plateau 1.

$$\begin{array}{l} * 300 \xrightarrow{:-2} 148 \xrightarrow{:-2} 72 \xrightarrow{:-2} 34 \\ \text{comparé avec le suite 1} \qquad \qquad \qquad \text{on se trompe de 3} \end{array}$$

33 c'est la 1^{er} erreur

- Si l'on prend 450 dans le 2^e plat.

$$\begin{array}{l} * 450 \xrightarrow{:-2} 228 \xrightarrow{:-2} 109,5 \xrightarrow{:-2} 52,75 \\ \text{comparé avec le suite 1} \quad \text{on se trompe de} \end{array}$$

51,75 c'est la 2^e erreur

* multiplie la par 300

$$51,75 \times 300 = 15525$$

* multiplie la 1^{er} erreur par 450

$$33 \times 450 = 14850$$

fait la différence du plus grand et du plus petit

$$15525 - 14850 = 675.$$

* soustrait la 1^{er} erreur de la 2^e tu trouve

$$51,75 - 33 = 18,75.$$

* divise 675 par 18,75 tu trouve 36

le même nombre que celui que l'on trouve avec 100 et 200 dans les 2 plateaux

3. Bien qu'il ait trouvé un résultat juste, son raisonnement est faux car si on le suit en prenant 300 et 400 à la place de 100 et 200 comme il l'avait fait, alors il nous reste 0 pommes or il ne faut une pomme restante.

calculs: * $\frac{300}{2} = 150$ donc gardien n°1 \rightarrow 152 p.
 (p = pommes) $\frac{148}{2} = 74$ donc gardien n°2 \rightarrow 76 p.
 $\frac{72}{2} = 36$ donc gardien n°3 \rightarrow 38 p.

il reste 72 p.
 IP reste 34, c'est notre première erreur.

* $\frac{400}{2} = 200$ donc gardien n°1 \rightarrow 202 p.
 $\frac{198}{2} = 99$ donc gardien n°2 \rightarrow 101 p.
 $\frac{97}{2} = 48,5$ donc gardien n°3 \rightarrow 50,5 p.

IP reste 46,5, c'est notre deuxième erreur.

calculs faits
 suivant
 le
 raisonnement

$$\left\{ \begin{array}{l} 46,5 \times 300 = 13950 \\ 400 \times 34 = 13600 \\ 13950 - 13600 = 350 \\ 46,5 - 34 = 12,5 \\ 350 - 12,5 = 28. \end{array} \right.$$

Le nombre de pommes cueilli est de 28.

vérification: $\frac{28}{2} = 14$ gardien n°1 \rightarrow 16 p.
 $\frac{12}{2} = 6$ gardien n°2 \rightarrow 8 p.
 $\frac{4}{2} = 2$ gardien n°2 \rightarrow 4 p.

IP reste 0 pommes, donc le raisonnement est tout à fait faux excepté avec quelques nombres comme 100 et 200.

QUELS SONT LES ARGUMENTS DEVELOPPES?

Des différences importantes se manifestent suivant les classes.

Ces différences peuvent-être dues:

- aux questions posées par le professeur
- au type de classe

Un élève de troisième (oralement):

«Il a pris 100 ,il a vu que c'était trop grand ,alors je ne comprends pas pourquoi il a pris ensuite 200 »

Un élève de seconde manifeste la même préoccupation:

«Pourquoi 100 et 200?»

Des élèves substituent d'autres entiers à 100 et 200, puis constatent qu'ils obtiennent de nouveau 36 comme résultat.

Tel élève remarque après deux essais que la méthode n'a pas été mise en défaut:il conclut qu'elle est correcte.

Dans les 2 cas, le résultat est 36 donc ma supposition était fautive donc cette méthode est juste. Cette démonstration s'appelle une démonstration par l'absurde.

Une partie non négligeable des élèves se préoccupe de la relation entre les nombres choisis : Doit-on prendre un nombre et son double? deux nombres dont l'écart est 100?

Avec un écart de 100 : Avec un écart de 150.

$$\frac{300}{2} = 150 - 2 = 148$$

$$\frac{148}{2} = 74 - 2 = 72$$

$$\frac{72}{2} = 36 - 2 = 34$$

Eneur de 33

$$\frac{400}{2} = 200 - 2 = 198$$

$$\frac{198}{2} = 99 - 2 = 97$$

$$\frac{97}{2} = 48,5 - 2 = 46,5$$

Eneur de 45,5

$$300 \times 45,5 = 13650$$

$$400 \times 33 = 13200$$

$$13650 - 13200 = 450$$

$$450 - 33 = 417$$

$$\frac{417}{12,5} = \boxed{36}$$

$$\frac{350}{2} = 175 - 2 = 173$$

$$\frac{173}{2} = 86,5 - 2 = 84,5$$

$$\frac{84,5}{2} = 42,25 - 2 = 40,25$$

Eneur de 39,25

$$\frac{500}{2} = 250 - 2 = 248$$

$$\frac{248}{2} = 124 - 2 = 122$$

$$\frac{122}{2} = 61 - 2 = 59$$

Eneur de 58

$$350 \times 58 = 20300$$

$$500 \times 39,25 = 19625$$

$$20300 - 19625 = 675$$

$$58 - 39,25 = 18,75$$

$$\frac{675}{18,75} = \boxed{36}$$

Oui, la méthode exposée par Ben Ezzou est bonne puisque avec d'autres exemples le résultat est bon, nous trouvons 36.

Quelques élèves de seconde font un essai de généralisation, choisissant x et $2x$ comme nombres de départ :

Remplaçons 100 par x

$$\frac{x-2}{2} - 2$$

$$\frac{\frac{x-2}{2} - 2}{2} - 2 = \frac{x-7}{8} - 2 \quad ; \text{ c'est ce que l'on appelle le 1er reste}$$

$$\frac{\frac{x-7}{8} - 1}{2} = \frac{x-36}{8} \quad ; \text{ 1ère erreur}$$

$$\frac{2x-2}{2} - 2$$

$$\frac{\frac{2x-2}{2} - 2}{2} - 2 = \frac{x-7}{4} - 2 \quad ; \text{ 2ème reste}$$

$$\frac{\frac{x-7}{4} - 1}{2} = \frac{x-18}{4} \quad ; \text{ 2ème erreur}$$

On multiplie la 2ème erreur avec le 1er plateau
puis on lui soustrait la 1ère erreur multipliée par le 2ème plateau
ce qui nous donne :

$$\left(\frac{x-18}{4}\right) \times 2 - \left(\frac{x-36}{8}\right) \times 2 = \frac{x^2-18x}{4} - \frac{x^2-36}{4}$$
$$= \frac{9x}{2}$$

puis j soustrait les 2 erreurs

$$\frac{x-18}{4} - \frac{x-36}{8} = \frac{x}{8}$$

on divise $\frac{9x}{2}$ par $\frac{x}{8}$ et on obtient 36

si bien que quelque soit le nombre choisi dans
le 1er plateau on obtient toujours 36 comme résultat

D'autres élèves de seconde choisissent deux variables littérales pour remplacer 100 et 200 et aboutissent au résultat attendu:

II) La mise en équation donne: $x \gg x'$

$$\frac{x \times \left(\frac{1}{8} x' - 3,5 - 1 \right) - x' \times \left(\frac{1}{8} x - 3,5 - 1 \right)}{\frac{1}{8} x' - 3,5 - 1 - \frac{1}{8} x + 3,5 + 1}$$

$$\frac{\frac{1}{8} x x' - 4,5 x - \frac{1}{8} x x' + 4,5 x'}{\frac{1}{8} x' - \frac{1}{8} x}$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{1}{8} x x' - 4,5 x - \frac{1}{8} x x' + 4,5 x'}{\frac{1}{8} x' - \frac{1}{8} x}$$

$$\frac{4,5 x' - 4,5 x}{\frac{1}{8} x' - \frac{1}{8} x} = \frac{4,5 (x' - x)}{\frac{1}{8} (x' - x)} = \frac{4,5}{\frac{1}{8}} = 36$$

$$\Rightarrow \frac{4,5 x' - 4,5 x}{\frac{1}{8} x' - \frac{1}{8} x} = \frac{4,5 (x' - x)}{\frac{1}{8} (x' - x)} = \frac{4,5}{\frac{1}{8}} = 36$$

On obtient 36 quels que soient x et x' .

Le concept de fonction affine est sous-jacent dans la méthode de Ben Ezra; il semble qu'aucun élève n'ait reconnu a priori la situation comme affine ...

La méthode de "Ben Ezra" est vraiment

peu claire et compliquée

Je n'ai trouvé presque aucun rapport avec

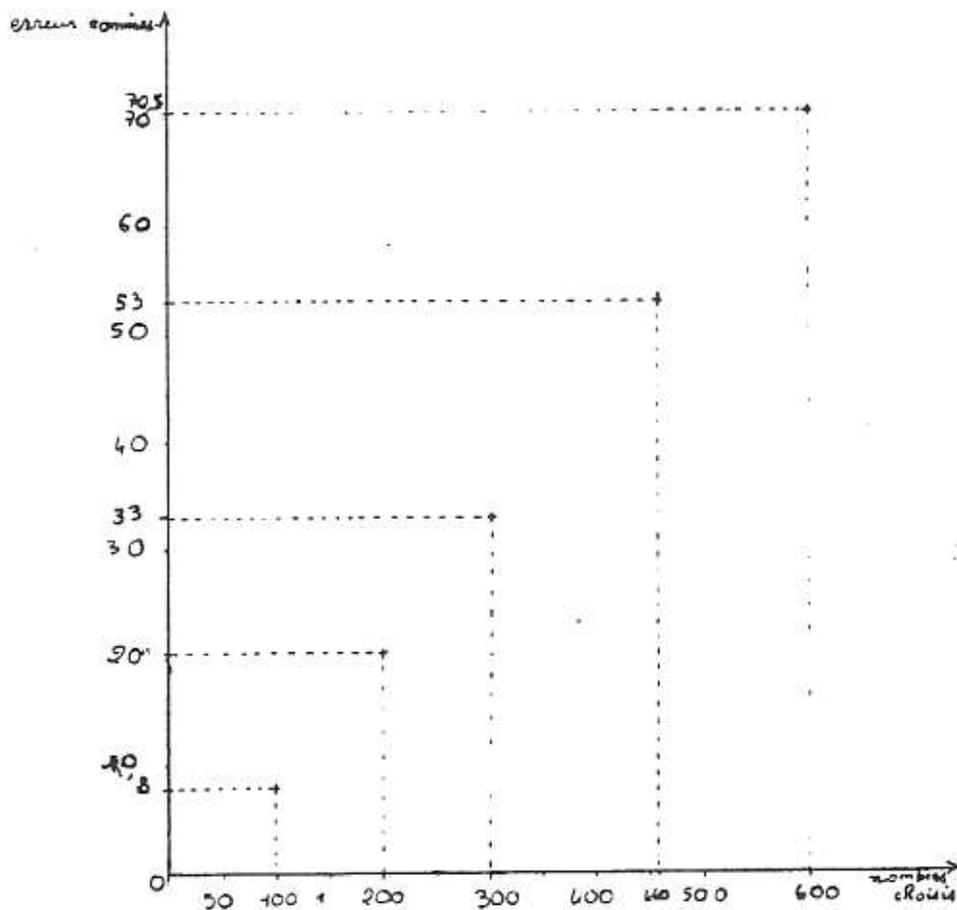
les fonctions affines.

Cependant, je suis impressionnée par son intelligence ..

Cette activité était intéressante et originale, mais l'application des fractions affines par rapport au cours n'était pas évidente. Il était intéressant aussi de voir la façon dont Ben Ezra effectuait ses calculs sans disposer de certains signes mathématiques élémentaires. Le problème en lui-même était attrayant.

...sauf quand le professeur l'a explicitement indiqué:

Dessin



Fonction affine:

$$100 \rightarrow 8 \text{ (ex)}$$

$$200 \rightarrow 20,5$$

$$ex = ax + b$$

$$8 = 100a + b$$

$$20,5 = 200a + b$$

$$\begin{cases} 8 - 100a = b \end{cases}$$

$$\begin{cases} 20,5 - 200a = b \end{cases}$$

$$\begin{cases} 8 - 100a = 20,5 - 200a \\ 8 - 20,5 = -200a + 100a \end{cases}$$

$$\begin{cases} -12,5 = -100a \\ \frac{-12,5}{-100} = a \end{cases} \Rightarrow 0,125 = a$$

$$8 = 100 \times 0,125 = b$$

$$8 - 12,5 = b$$

$$-4,5 = b$$

$$y = 0,125x - 4,5$$

Malgré nos jours on peut calculer grâce à l'application affine:

Soit x_1 le 1^{er} nombre choisi

Soit e_{x_1} la 1^{ère} erreur

Soit x_2 le 2^{ème} nombre choisi

Soit e_{x_2} la 2^{ème} erreur

$$x_1 \times e_{x_2} - x_2 \times e_{x_1}$$

$$\frac{x_1 \times e_{x_2} - x_2 \times e_{x_1}}{e_{x_2} - e_{x_1}}$$

$$= \frac{x_1 \times (0,125x_2 - 4,5) - x_2 \times (0,125x_1 - 4,5)}{0,125x_2 - 4,5 - 0,125x_1 + 4,5}$$

$$= \frac{0,125x_2x_1 - 4,5x_1 - 0,125x_1x_2 + 4,5x_2}{0,125(x_2 - x_1)}$$

$$= \frac{4,5(x_2 - x_1)}{0,125(x_2 - x_1)}$$

$$= \boxed{36}$$

Aucun élève n'a tenté spontanément d'appliquer la méthode à d'autres situations (en modifiant le nombre 3, les nombres 1 ou l'opérateur concerné: division par 2, suivi d'une soustraction de 2 unités)

Faute de temps?

POURQUOI AU FAIT ELARGIR LE PROBLEME?

L'énoncé utilisait de façon explicite des données précises:

3 portes, 1 fruit, division par 2 des fruits restants...

Ces nombres, contrairement à 100 et 200, figurent dans l'énoncé. Est-il moins naturel de les modifier?

Un seul élève a affirmé que sa méthode lui permettait de résoudre une classe de problèmes plus étendue (cf p12).

Interrogés sur les réflexions que ce travail leur inspire, certains élèves s'essayaient à une comparaison avec des méthodes "plus modernes".

Je pense que si Abraham Ben Ezra vivait dans notre siècle. Il serait étonné de la rapidité qu'on utilise pour la double fausse position, alors qu'il a fallu beaucoup d'années pour découvrir son système

* La conclusion c'est que leur méthode est très bien mais elle est compliquée et longue. Et c'est pour cela que à force des mathématiciens ont inventé des méthodes plus faciles et plus claires.

Cela m'étonne que les anciens savants aient pensé à ~~une~~ une solution relativement longue alors que c'était beaucoup plus simple de procéder comme ci-dessus. Ils ont peut-être pensé à cette solution mais la trouvant trop simple ont décidé d'en trouver une plus compliquée pour se distraire.

Non sollicitée, une élève de seconde tient à faire connaître son sentiment:

M. Ibrahim Ben Ezra utilise une méthode particulière et très recherchée. On comprend très facilement le raisonnement initié par M. Ibrahim au cours des deux premiers paragraphes. Un très jeune élève le comprendrait très rapidement. Par contre le troisième paragraphe, je suis plus sceptique et j'avoue que sa logique me dépasse totalement.

Monsieur Ben Ezra commence à donner une image beaucoup plus compliquée des mathématiques.

Dans cette dernière partie du texte il y a une légère ressemblance avec les maths de notre siècle.

On a beaucoup plus l'impression qu'il utilise une méthode mathématique et qu'il ne suis plus la logique. Seuls les bons mathématiciens ayant appris la méthode correctement et raisonnablement.

C'est un mélange de l'ancienne vision des maths et une vue progressive sur les maths modernes.

C'est à ces hommes là que l'on doit ces difficultés dans cette matière pour les mauvais et ces facilités pour les petits cracks, passionnés des maths.

CONCLUSION

L'opinion commune est que les mathématiques sont un outil de calcul: on ne retient que l'aspect technique, voire algorithmique de la discipline. En contrepartie elles seraient closes et achevées, parvenues à une froide perfection, au fond peu humaines.

Si l'appropriation par les élèves de méthodes éprouvées et d'algorithmes performants est sans doute indispensable, nous ne pensons pas que l'activité mathématique se réduise à ce seul aspect. Ne devons-nous pas leur montrer toutes les étapes de la démarche scientifique? Faire des mathématiques, n'est-ce pas se poser des questions tout autant que les résoudre?

Sous cet angle, l'introduction dans la classe de textes historiques, lorsqu'elle n'est pas uniquement anecdotique, revêt un caractère formateur particulièrement intéressant.

Le texte de Ben Ezra invitait plus précisément les élèves à confronter leurs connaissances et savoir-faire à ceux d'un mathématicien du XII^{ème} siècle, et pouvait ainsi leur montrer le long chemin séparant les premières tentatives de résolution d'un problème des méthodes actuelles très élaborées, qui leur sont souvent présentées dans un conditionnement de produit fini.

Avons-nous réussi à élargir l'horizon mathématique de nos élèves? Nous l'espérons; en tout cas chez certains nous avons constaté une modification durable du comportement vis à vis de la matière.

De plus cette activité nous a permis de mettre au grand jour les démarches mises en oeuvre par les élèves et d'engager une réflexion sur ce sujet à l'intérieur de notre groupe.

Enfin n'oublions pas que la grande majorité d'entre eux a pris un réel plaisir à travailler sur ce texte. Tant mieux... d'autant que ce plaisir fut partagé par leurs professeurs.

A N N E X E S

classe de première année de B.E.P.

Le texte de Ben Ezra est présenté aux 16 élèves, sortant de Troisième, d'une classe préparant au diplôme d'Opérateur Géomètre Topographe. Leur horaire hebdomadaire est de 5h par semaine).

Dans les semaines qui ont précédé, ont été étudiées les fonctions linéaires et affines et les suites arithmétiques.

Dispositif pédagogique:

Les élèves qui travaillent par deux ont besoin d'une heure pour poser des questions et recueillir les informations du professeur ; Le travail écrit sera demandé après une heure et demie de travail.

Remarque:

3 groupes ont travaillé sur A

3 groupes ont travaillé sur B

1 groupe a travaillé sur C

7 élèves ont tenu à rendre une rédaction personnelle.

Résolution d'équations du premier degré à une inconnue

"Liber augmenti et diminutionis vocatus numeratio divinationis ...",

attribué à Abraham Ben Ezra, né à Tolède vers 1090 et mort à Rome (?)

en 1167. Ben Ezra a voyagé beaucoup, de l'Égypte à Londres et a écrit entre autres le livre de l'Unité, le livre du Nombre. Lui doit-on aussi le "Liber augmenti et diminutionis..." ? les avis sont partagés.

L'extrait suivant est intitulé "le chapitre des fruits" (Capitulum de pomis)

[8] p. 336 à 338.

Résolution du problème

LA DOUBLE FAUSSE POSITION

Le chapitre de la numération te propose de placer 100 dans le plateau. Partage avec le premier (gardien) en lui donnant deux (fruits) supplémentaires. Il t'en reste 48 ; partage avec le second et donne lui en 2 de plus, il t'en reste 22 ; enfin partage avec le 3ème et donne lui en deux, et il t'en reste 9. Mais compare avec le reste 1. Tu t'es trompé de 8, en excédent. On appelle cela la première erreur.

Ensuite prends dans le second plateau le nombre 200, partage avec le premier (gardien) en lui donnant deux (fruits) de plus ; il t'en reste 98 ; partage avec le second et donne lui en deux de plus, il t'en reste 47 ; enfin partage avec le troisième puis donne lui en deux de plus, et il t'en reste 21 1/2, en plus. Mais compare avec le reste 1. Tu t'es trompé de +20 1/2. Ceci est la deuxième erreur.

Multiplie la par 100 qui est dans le premier plateau et on obtient 2050 ; ensuite multiplie ce qui est dans le second plateau par l'erreur du premier, ce qui revient à multiplier 200 par 8, et cela fera 1600. Tu retranches alors le plus petit du plus grand, soit 1600 de 2050 ; il reste 450.

Enfin retranche une erreur de l'autre, c'est-à-dire 8 de 20 1/2, il reste 12 1/2. Divise alors 450 par ce nombre, et tu obtiens 36. C'est donc le nombre de fruits qu'il a cueilli.

Énoncé du problème

"Et si on dit : un homme est entré dans un verger et il y a cueilli des fruits. Mais le verger avait 3 portes, gardées chacune par un gardien. Cet homme donc partagea les fruits avec le 1er et lui en donna deux de plus, puis il partagea avec le 2ème et lui en donna deux de plus, enfin partagea avec le 3ème, lui en donna deux de plus, et il sortit en ayant seulement 1 fruit. Combien de fruits a-t-il cueilli ?

Preliminaires : dans les représentations et tableaux de résolution, on appellera :

x : nombre de fruits après cueillette
 y : nombre de fruits après sortie du verger

Travail demandé ; au choix :

- (A) Présenter, dans un tableau, les nombres successifs utilisés dans les phases ① et ② de la résolution
- Trouver une méthode plus simple et plus rapide pour arriver à la solution
 - A partir d'une troisième "fausse position", montrer que la fonction f : $x \mapsto y$ est du type affine.
- (B) Rechercher l'expression algébrique de f : $x \mapsto y$ et utiliser celle-ci pour calculer x quand $y = 1$
- Trouver, à partir de la proportionnalité des accroissements, une expression de x en fonction de x_1, y_1, x_2, y_2 et $y (= 1)$
- (C) Trouver l'expression utilisée dans la méthode "D.F.P." pour le calcul de $x (= 36)$ à partir des nombres intervenant dans le calcul ; ces nombres sont à exprimer au moyen de x_1, y_1, x_2, y_2 et $y (= 1)$ 37

Classe de Seconde

La recherche s'est faite dans une classe d'un profil plutôt littéraire de 39 élèves pendant la séance de travaux dirigés. Nous venions de terminer les révisions concernant les fonctions affines.

Questions posées à la classe:

1° Comment feriez-vous pour résoudre ce problème?

2° Le résultat de l'auteur dépend-il des nombres choisis au départ?

3° Expliquer son raisonnement en mettant en évidence une fonction affine. Préciser le coefficient directeur et l'ordonnée à l'origine de cette fonction.

Dispositif pédagogique:

Les élèves ont travaillé par groupes de 4 à 5 élèves dont la constitution s'est faite librement. Un compte-rendu par groupe devait être rédigé à la fin de la séance.

Durée 1h30

Classe de Seconde

Travail dirigé par demi classe :

de 15 à 16h30 ; 19 élèves, de 16h30 à 18h ; 20 élèves:

Chaque élève reçoit :

le texte qui ne peut lui paraître en application d'un cours précis:

les questions suivantes:

- 1) Comment auriez-vous résolu le problème ?
- 2) Le résultat de l'auteur est-il juste ?
- 3) Le raisonnement de l'auteur est-il juste ?

Ils peuvent travailler en groupes (pas plus de quatre) et choisir leurs camarades de travail .

Chaque groupe pourra rendre une feuille répondant aux questions.

Seulement deux groupes de deux et deux élèves isolés ne rendent pas de feuille.

Volontairement le professeur intervient le moins possible, désirant observer les élèves et regarder tout particulièrement les élèves qui ne participent pas beaucoup.

D'ailleurs une conversation amène une élève à réfléchir sur les causes et les effets de son absence de participation. Par la suite, la transformation de son comportement, même si les résultats scolaires ne prennent pas un essor miraculeux, est durable et encourageante.

Classe de Seconde

Le travail suivant a été proposé pendant une séance de T.P., où la classe est dédoublée. Les élèves avaient auparavant étudié les propriétés des applications affines et la résolution des systèmes d'équations linéaires.

Les élèves ont travaillé en groupes librement constitués. Chaque groupe devait remettre un compte rendu. Le travail n'était pas noté.

La question 1° était prévue comme un simple "échauffement", mais les élèves en eurent bien besoin pour assimiler la méthode de Ben Ezra.

La question 4° (trop ambitieuse pour le niveau de la classe?) ne fut étudiée par aucun groupe.

2 -

LA DOUBLE FAUSSE POSITION.

(ou comment résolvait-on les équations du premier degré à une inconnue au moyen âge)

II.1.1. "Liber augmenti et diminutionis vocatus numeratio divinationis ...", attribué à Abraham Ben Ezra, né à Tolède vers 1090 et mort à Rome (?) en 1167. Ben Ezra a voyagé beaucoup, de l'Égypte à Londres et a écrit entre autres le livre de l'Unité, le livre du Nombre. Lui doit-on aussi le "Liber augmenti et diminutionis..." ? les avis sont partagés.

L'extrait suivant est intitulé "le chapitre des fruits" (Capitulum de pomis) [8] p. 336 à 338.

Enoncé du Problème

"Et si on dit : un homme est entré dans un verger et il y a cueilli des fruits. Mais le verger avait 3 portes, gardées chacune par un gardien. Cet homme donc partagea les fruits avec le 1er et lui en donna deux de plus, puis il partagea avec le 2ème et lui en donna deux de plus, enfin partagea avec le 3ème, lui en donna deux de plus, et il sortit en ayant seulement 1 fruit. Combien de fruits a-t-il cueilli ?

Questions

- 1°/ Vérifiez la solution donnée par Ben Ezra.
- 2°/ Savez-vous résoudre le problème par une autre méthode ? Si oui exposez votre méthode.
- 3°/ La méthode exposée par Ben Ezra est-elle toujours correcte ? Justifiez votre réponse.
- 4°/ Appelez x le nombre de fruits cueillis et r le nombre de fruits restants après les 3 partages, exprimez x en fonction de r et reformulez la question 3°/.

Résolution du Problème

Le chapitre de la numération te propose de placer 100 dans le plateau. Partage avec le premier (gardien) en lui donnant deux (fruits) supplémentaires. Il t'en reste 48 ; partage avec le second et donne lui en 2 de plus, il t'en reste 22 ; enfin partage avec le 3ème et donne lui en deux, et il t'en reste 9. Mais compare avec le reste 1. Tu t'es trompé de 8, en excédent. On appelle cela la première erreur.

Ensuite prends dans le second plateau le nombre 200, partage avec le premier (gardien) en lui donnant deux (fruits) de plus ; il t'en reste 98 ; partage avec le second et donne lui en deux de plus, il t'en reste 47 ; enfin partage avec le troisième puis donne lui en deux de plus, et il t'en reste 21 $\frac{1}{2}$, en plus. Mais compare avec le reste 1. Tu t'es trompé de +20 $\frac{1}{2}$. Ceci est la deuxième erreur.

Multiplie la par 100 qui est dans le premier plateau et on obtient 2050 ; ensuite multiplie ce qui est dans le second plateau par l'erreur du premier, ce qui revient à multiplier 200 par 8, et cela fera 1600. Tu retranches alors le plus petit du plus grand, soit 1600 de 2050 ; il reste 450. Enfin retranche une erreur de l'autre, c'est-à-dire 8 de 20 $\frac{1}{2}$, il reste 12 $\frac{1}{2}$. Divise alors 450 par ce nombre, et tu obtiens 36. C'est donc le nombre de fruits qu'il a cueilli.

Classe de Seconde

A la suite du chapitre sur les applications affines et problèmes du premier degré, j'ai proposé le texte de Ben Ezra, en Travaux Dirigés, à une classe dont la majorité des élèves souhaite faire une lère S.

Le texte distribué, je demandai seulement :

"qu'en pensez-vous?"

Suite à une discussion avec mes collègues ayant déjà proposé ce texte dans leur classe, j'avais souhaité voir la réaction de mes élèves si je ne posais aucune question précise ; je pensais alors qu'ils liraient le texte jusqu'au bout puis réagiraient par rapport à la solution proposée.

Mais tous se sont arrêtés à l'énoncé du problème...

Au bout de trois quart d'heure la plupart d'entre eux n'avaient pas regardé la solution de Ben Ezra mais avaient résolu le problème à leur manière. Je suis alors intervenue pour préciser ce que j'attendais d'eux par la suite. "Exprimez le nombre y de fruits restant à la sortie en fonction du nombre x de fruits cueillis" "La méthode proposée est-elle justifiée?"

Les élèves ont travaillé par groupes de 3 à 5 formés, chaque groupe rendant une copie à la fin de la séance.

Classe de Quatrième

première phase: une séquence d'une heure.

Le texte est distribué sans préalable aux élèves (25 latinistes) qui en font une lecture personnelle. Nous reprenons alors ensemble cette lecture, précisons l'énoncé.

Ensuite j'essaie de répondre à quelques questions et de mener le débat sans induire chez eux de réponses ou de comportements.

Deuxième phase: les élèves sont invités à rédiger un compte-rendu de la séance pour la semaine suivante; pour les guider, quatre questions:

- 1) pourquoi "double fausse position?
- 2) la méthode est-elle juste? Comment le vérifier?
- 3) Comment résoudre-t-on aujourd'hui ce problème?
- 4) Quelles réflexions ce travail vous inspire-t-il?

Travail donné à neuf élèves de troisième qui n'ont pas participé au séjour de ski.

Les neuf élèves présents travaillent trois heures sur le sujet proposé et doivent rendre un travail rédigé. Ils peuvent former des groupes : un groupe de 4, un de 3 et un de 2 se constituent spontanément.

DES MATHÉMATICIENS ARABES

"Liber augmenti et diminutionis vocatus numeratio divinationis ...", attribué à Abraham Ben Ezra, né à Tolède vers 1090 et mort à Rome (?) en 1167. Ben Ezra a voyagé beaucoup, de l'Égypte à Londres et a écrit entre autres le livre de l'Unité, le livre du Nombre. Lui doit-on aussi le "Liber augmenti et diminutionis..." ? Les avis sont partagés.

L'extrait suivant est intitulé "le chapitre des fruits" (Capitulum de pomis) [8] p. 336 à 338.

Énoncé du problème

"Et si on dit : un homme est entré dans un verger et il y a cueilli des fruits. Mais le verger avait 3 portes, gardées chacune par un gardien. Cet homme dont partages les fruits avec le 1er et lui en donna deux de plus, puis il partagea avec le 2ème et lui en donna deux de plus, enfin partagea avec le 3ème, lui en donna deux de plus, et il sortit en ayant seulement 1 fruit. Combien de fruits a-t-il cueilli ?

Résolution du problème

LA DOUBLE FAUSSE POSITION

Le chapitre de la numération te propose de placer 100 dans le plateau. Partage avec le premier (gardien) en lui donnant deux (fruits) supplémentaires. Il t'en reste 48 ; partage avec le second et donne lui en 2 de plus, il t'en reste 32 ; enfin partage avec le 3ème et donne lui en deux, et il t'en reste 9. Mais compare avec le reste 1. Tu t'es trompé de 8, un excédent. On appelle cela la première erreur.

Ensuite prends dans le second plateau le nombre 200, partage avec le premier (gardien) en lui donnant deux (fruits) de plus ; il t'en reste 98 ; partage avec le second et donne lui en deux de plus, il t'en reste 42 ; enfin partage avec le troisième puis donne lui en deux de plus, et il t'en reste 21 1/2, en plus. Mais compare avec le reste 1. Tu t'es trompé de +20 1/2. Ceci est la deuxième erreur.

Multiplie le par 100 qui est dans le premier plateau et on obtient 2050 ; ensuite multiplie ce qui est dans le second plateau par l'erreur du premier, ce qui revient à multiplier 200 par 8, et cela fera 1600. Tu retranches : alors le plus petit du plus grand, soit 1600 de 2050 ; il reste 450.

Enfin retranche une erreur de l'autre, c'est-à-dire 8 de 20 1/2, il reste 12 1/2. Divise alors 450 par ce nombre, et tu obtiens 36. C'est donc le nombre de fruits qu'il a cueilli.

- ① lis attentivement ce texte.
- ② Que veut faire Ben Ezra ?
- ③ Qu'as-tu envie de faire, toi ?
- ④ Trouves-tu la méthode de Ben Ezra facile ? exacte !
- ⑤ Peux-tu déterminer une méthode plus simple ? Explique.
- ⑥ dans d'autres traités d'arithmétique on trouve le même genre de méthode que celle décrite par Ben Ezra.

lis la page ci-contre et applique la méthode au problème d'Al-Kashi