EVOLUTION DU CONCEPT DE FONCTION[1]

Patrick Perrin

In primo igitur Libro, cum universa Analysis infinitorum circa quantitates variabiles earumque Functiones versetur, hoc argumentum de Fonctionibus inprimis fusius exposui.[2]
Leonhard Euler, *Préface de l'Introductio in Analysin infinitorum*

Comment est on passé de l'idée très ancienne de relation entre des quantités à la conception moderne d'une correspondance qui à tout élément d'un ensemble associe un élément d'un autre ensemble ?
Il est possible de distinguer cinq étapes dans l'historique de cette évolution.

Étape 1 : Table de valeurs numériques

A Babylone, on utilisait déjà des tables de carrés, cubes, racines carrées et cubiques ; ainsi que des tables d'éphémérides (soleil, lune, planètes).
Dans l'antiquité grecque les Pythagoriciens ont étudié les lois reliant les hauteurs des sons émis par des cordes et les longueurs de celles-ci. Les Alexandrins dressèrent les premières tables de corde (Hipparque, Menelaus, Ptolémée) ; seules celles de Ptolémée nous sont parvenues. Les tables utilisées dans l'antiquité sont conçues comme des relations entre des ensembles finis de quantités constantes (il n'y a pas d'idée de quantité variable). Aucun symbolisme algébrique, excepté chez Diophante, aucune expression analytique n'ont été utilisés. Seul le mouvement uniforme est envisagé (rectiligne ou circulaire).
Vers l'an 500, le mathématicien indien Aryabatha donna les premières tables de sinus. Plus tard les Arabes améliorèrent et diversifièrent les tables numériques. Nous leur devons l'introduction des autres lignes trigonométriques.

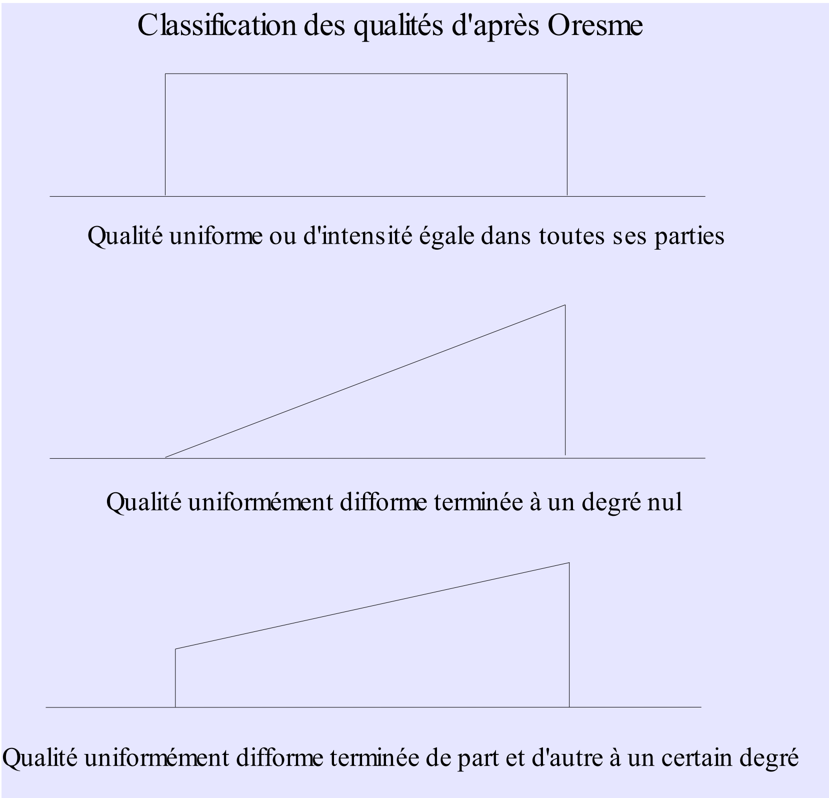
Étape 2 : Représentation géométrique et mécanique d'une fonction

Au 14[e] siècle, dans les écoles de philosophie naturelle d'Oxford et de Paris, on commence à considérer les mathématiques comme l'instrument de connaissance des phénomènes naturels. On

1 Ce texte est un résumé d'une conférence donnée en 1999 à la faculté des sciences de Reims dans le cadre d'un enseignement d'histoire des sciences destiné à des étudiants de DEUG.

2 *Ainsi dans le premier livre je me suis surtout étendu sur le sujet des fonctions, puisque l'analyse infinitésimale toute entière a pour objet les quantités variables et leurs fonctions.*

cherche à quantifier certaines « qualités » ou « formes » telles que la chaleur, la lumière, la couleur, la densité, la distance, la vitesse en leur prêtant des « degrés d'intensité » pouvant varier continûment entre des limites données. Les « intensités des formes » sont considérées en relation avec leurs « extensions », par exemple : la quantité de matière, le temps...
Les premiers concepts de cinématique apparaissent : vitesse instantanée, accélération. On peut citer : Roger Bacon, William Heytesbury, Richard Swineshead et Nicole Oresme. Nous leur devons la première représentation graphique d'une « fonction » : degré d'intensité sur une ligne verticale et extension sur une ligne horizontale ; le théorème de Merton (détermination de la vitesse moyenne d'un mouvement uniformément accéléré). Une classification des qualités en plusieurs sortes (uniforme, uniformément difforme, difformément difforme) apparaît chez Oresme.



Classification des qualités d'après Oresme

Qualité uniforme ou d'intensité égale dans toutes ses parties

Qualité uniformément difforme terminée à un degré nul

Qualité uniformément difforme terminée de part et d'autre à un certain degré

Cette *théorie de la latitude des formes* jouit d'une grande renommée en Europe au 15^{e} et au début du 16^{e} siècle.
Deux événements vont ensuite préparer une nouvelle transformation du concept de fonction, à savoir sa représentation par une formule.
Le premier est l'apparition chez différents algébristes du 16^{e} siècle de systèmes de notation qui finiront par déboucher sur l'algèbre littérale symbolique. Le second, initié par les travaux de Kepler sur les trajectoires des planètes et ceux de Galilée sur les principes de base de la mécanique, replace l'étude des propriétés des courbes au centre des préoccupations des mathématiciens.

Dernière fonction à être introduite dans le langage ancien et par des considérations cinématiques : le logarithme par Néper en 1614.

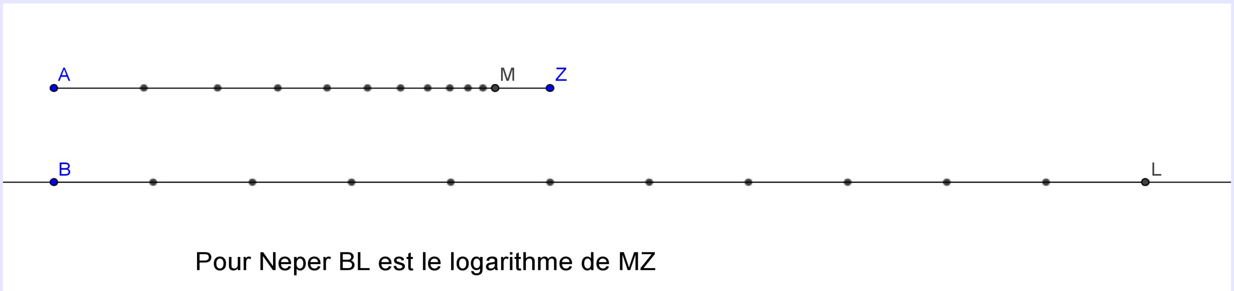
Le logarithme de Neper

En 1614, le baron écossais Jean Neper fait paraître un traité intitulé *Description de la merveilleuse règle des logarithmes* dans lequel il expose une définition générale des logarithmes et donne une table à 7 chiffres des logarithmes des sinus de 0° à 90° de minute en minute.

Sa définition repose sur une image cinématique :
Le logarithme de tout sinus est un nombre qui exprime avec une grande approximation la ligne, qui augmente également dans des temps égaux pendant que la ligne du sinus total décroît proportionnellement dans ce sinus, les deux mouvements ayant lieu dans le même temps, et au commencement avec la même vitesse.

Voici une présentation simplifiée du modèle mécanique de Néper. M et L sont deux mobiles qui se déplacent suivant des trajectoires parallèles : le segment AZ et la demi-droite d'origine B.

M se déplace avec une vitesse proportionnelle à sa distance x au point Z tandis que L se déplace à une vitesse uniforme. Les mobiles partent au même instant avec la même vitesse initiale v. (A l'instant t = 0, M est en A et L est en B). Pour Néper BL est le logarithme de MZ. Il prendra pour calculer les logarithmes de sa table AZ = 10^7. Ce procédé permet de transformer une suite géométrique en une suite arithmétique.



Une traduction totalement anachronique en termes modernes donnerait : $x = MZ$ vérifie l'équation différentielle $\frac{dx}{dt} = -kx$ où k est une constante positive et par conséquent $y = BL$ vérifie $y = 10^7 \ln\left(\frac{10^7}{x}\right)$.

Étape 3 : Fonction vue comme expression analytique

La géométrie analytique de Descartes et Fermat permet une nouvelle façon de penser une relation fonctionnelle entre deux quantités variables sous la forme d'une équation entre des coordonnées x et y. Même si Descartes distingue deux types de courbes : les géométriques susceptibles d'être représentées par une équation algébrique P(x, y) = 0 où P est un polynôme (exemple les coniques) et les mécaniques (exemple la roulette ou cycloïde).

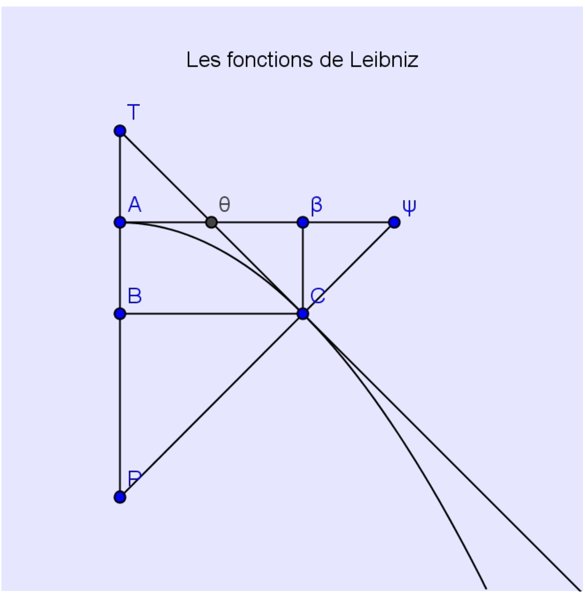
Au milieu du 17e siècle, la découverte du développement en série entière des fonctions par Mercator, Grégory et Newton élargit le champ des fonctions étudiées :

Nous disons qu'une quantité est composée à partir de quantités, lorsque, par addition, soustraction, multiplication, division, extraction de racines de ces quantités, ou par n'importe quelle opération imaginable, on obtient l'autre quantité. (Grégory : *Vera circuli et hyperbolae quadratura* – 1667)

Le calcul infinitésimal de Newton et de Leibniz va mettre la loi de variation de la relation fonctionnelle au centre de l'étude des propriétés des courbes. Isaac Newton propose une représentation cinématique (dans laquelle nous reconnaissons un paramétrage de la courbe) et considère *les quantités comme produites par une augmentation continuelle à la manière de l'espace que décrit un corps en mouvement*. Il appelle *fluentes ces quantités qu*'[il] *considère comme augmentées graduellement et indéfiniment* et fluxions *les vitesses dont les fluentes sont augmentées par le mouvement qui les produit*. (Newton : l*a méthode des fluxions et des suites infinies* - 1736)

Le mot « fonction » apparaît pour la première fois chez Leibniz mais pour désigner tout segment de droite dont la longueur dépend de la position du point courant de la courbe étudiée :

J'appelle fonction un segment de droite déterminable exclusivement à partir de droites menées entre un point fixe et un point donné de la courbe et de sa courbure. Telles sont l'abscisse AB ou $A\beta$, l'ordonnée BC ou βC, la tangente CT ou $C\theta$, la normale CP ou $C\psi$, la sous-tangente BT ou $\beta\theta$, la sous normale BP ou $\beta\psi$, le segment coupé par la tangente AT ou $A\theta$, le segment coupé par la normale AP ou $A\psi$, le segment délimité par ces deux dernières PT ou $\psi\theta$, le rayon d'osculation c'est-à-dire le rayon de courbure et quantités d'autres. (Leibniz : *nova calculi differentialis applicatio et usus ad multiplicem linearum constructionem ex data tangentium conditione* - 1694)



Leibniz introduit également l'usage généralisé des mots constante, variable, coordonnées, usage qui deviendra courant grâce au traité du Marquis de l'Hospital : *Analyse des infiniments petits.*

La première définition explicite d'une fonction comme expression analytique apparaît dans un article de Jean Bernoulli de 1718 :

Définition. On appelle fonction d'une grandeur variable une quantité composée de quelque manière que ce soit, de cette grandeur variable et de constantes.

Il y propose la notation φx. La notation f(x) est due à Euler (1740).

L' *Introductio in analysin infinitorum* de Leonhard Euler est le premier traité dans lequel le concept de fonction est à la base de l'analyse. Euler donne au début de cet ouvrage une classification des fonctions d'après la forme de leur expression analytique :

Classification des fonctions d'après Euler

- transcendantes
- algébriques
  - irrationnelles
    - explicites
    - implicites
  - rationnelles
    - fractionnaires
    - entières

Sa définition des fonctions transcendantes peut sembler naturelle :

Les fonctions se divisent en algébriques & en transcendantes ; les premieres sont formées par des opérations algébriques seulement, & les dernieres supposent pour leur formation des opérations transcendantes. (Euler : *Introductio in analysin infinitorum* - 1748)

Mais le contre-exemple i montre qu'il n'est pas toujours possible de déterminer la nature algébrique ou transcendante d'une fonction par simple lecture de l'expression analytique.

Euler appelle fonctions continues celles qui sont définies par une seule expression analytique et fonctions mixtes celles qui nécessitent différentes expressions analytiques. Ceci sera critiqué par Cauchy en 1844 qui donnera un exemple de fonction mixte et continue au sens d'Euler (cf. contre-exemple ii).

Euler pense (à tort) que toute fonction peut être transformée en une série infinie (cf. contre-exemple iii).

Ainsi il ne restera aucun doute, que toute fonction de z ne puisse être transformée en une série infinie de cette forme : $Az^{\alpha} + Bz^{\beta} + Cz^{\gamma} + Dz^{\delta}$ *(+&c), les exposans* $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, *&c. exprimant des nombres quelconques.* (ibidem)

Cette définition d'une fonction comme expression analytique dont la forme la plus générale serait une série entière est encore présente chez Lagrange, qui tente de prouver dans sa *Théorie des fonctions analytiques* que toute fonction peut être représentée par une série entière, sauf peut-être en des valeurs isolées où on utilise des puissances négatives ou fractionnaires.

Quelques contre-exemples plus ou moins célèbres (1)

i) Fonction définie par une seule expression et qui est algébrique ou transcendante suivant les valeurs de x :

Pour $x \geq 0$ $\quad f(x) = \lim \dfrac{x^{n+1} + e^x + 1 - e}{x^n + 1}$ quand n tend vers $+\infty$

(On a $f(x) = e^x + 1 - e$ pour $0 \leq x < 1$, $f(1) = 1$ et $f(x) = x$ pour $x > 1$)

ii) Fonction mixte et continue au sens d'Euler :

$$f(x) = \begin{cases} x \text{ si } x \geq 0 \\ -x \text{ si } x < 0 \end{cases} \qquad \text{i.e.} \quad f(x) = \sqrt{x^2} \quad \text{(Cauchy, 1844)}$$

iii) Fonction indéfiniment différentiable sur **R** et non analytique :

$$f(x) = \begin{cases} \exp\left(\dfrac{-1}{x^2}\right) \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases} \qquad \text{(Cauchy, 1823)}$$

Étape 4 : Fonction vue comme correspondance quelconque

L'étude des solutions de l'équation aux cordes vibrantes va amener Euler à envisager en 1755 une définition plus générale des fonctions, car pour lui les fonctions arbitraires intervenant dans ces solutions peuvent correspondre à des courbes tracées à main libre :

Si certaines quantités dépendent d'autres quantités de telle manière que si les autres changent, ces quantités changent aussi, alors on a 1'habitude de nommer ces quantités fonctions de ces dernières ; cette dénomination a la plus grande étendue et contient en elle-même toutes les manières par lesquelles une quantité peut être déterminée par d'autres. (Euler : *Institutiones calculi differentialis* - 1755)

De son côté Daniel Bernoulli a trouvé des solutions de l'équation aux cordes vibrantes sous forme de séries trigonométriques. Ainsi surgit la nouvelle question qui allait faire progresser le concept de fonction au 19e siècle : les fonctions arbitraires au sens d'Euler peuvent-elles être représentées par une série trigonométrique ?

L'équation aux cordes vibrantes

$$\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$$

Sa solution générale est : $u(x,t) = f(x + vt) + g(x - vt)$ où f et g sont des fonctions arbitraires d'une variable ; elle s'interprète comme la superposition de deux ondes arbitraires qui se propagent à la vitesse v, l'une dans le sens des x négatifs, l'autre dans les sens des x positifs.

Le concept allait aussi bénéficier de l'effort de rigueur mené par Gauss, Cauchy, Bolzano et Abel concernant les fondements du calcul différentiel : étude de la convergence des séries, définition de la continuité d'une fonction, de sa dérivée. Remarquons tout de même que, en ce début du 19e siècle, les mathématiciens ne mettent pas en doute l'existence de la dérivée des fonctions continues (plus précisément ils pensent qu'une fonction continue admet en tout point une dérivée à gauche et une dérivée à droite éventuellement infinie). Il faudra les travaux de Fourier et de Dirichlet pour que ces deux notions soient clairement distinguées. Les conditions du théorème de Dirichlet sur la convergence de la série de Fourier d'une fonction mettent l'accent sur les points où la fonction n'est pas continue, n'est pas dérivable.

En 1854 Riemann développe une théorie de l'intégration pour pouvoir représenter par des séries de Fourier (dont les coefficients sont des intégrales) des fonctions ayant une infinité de points de discontinuité. Condorcet, Lacroix, Fourier, Lobatchesky, Dirichlet avait repris la définition la plus générale d'Euler d'une fonction.
En général, la fonction f(x) représente une suite de valeurs ou ordonnées dont chacune est arbitraire. (Fourier : *Théorie analytique* de *la chaleur* - 1821)
Après Riemann on peut dire que la notion de fonction comme correspondance arbitraire entre les éléments de deux ensembles est acquise. Il n'est alors plus possible de classer les fonctions d'après la forme de leur expression analytique, on le fera d'après certaines propriétés données : fonctions continues, discontinues, différentiables, intégrables … etc ...
L'approfondissement des notions de fonction et de continuité s'est accompagné de la construction de fonctions de plus en plus pathologiques, jouant le rôle de contre-exemples à des conjectures fausses (cf. contre-exemples iv à vi).

Quelques contre-exemples plus ou moins célèbres (2)

iv) Fonction non continue limite d'une suite de fonctions continues :

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin(nx)}{n} \qquad \text{(Abel, 1826)}$$

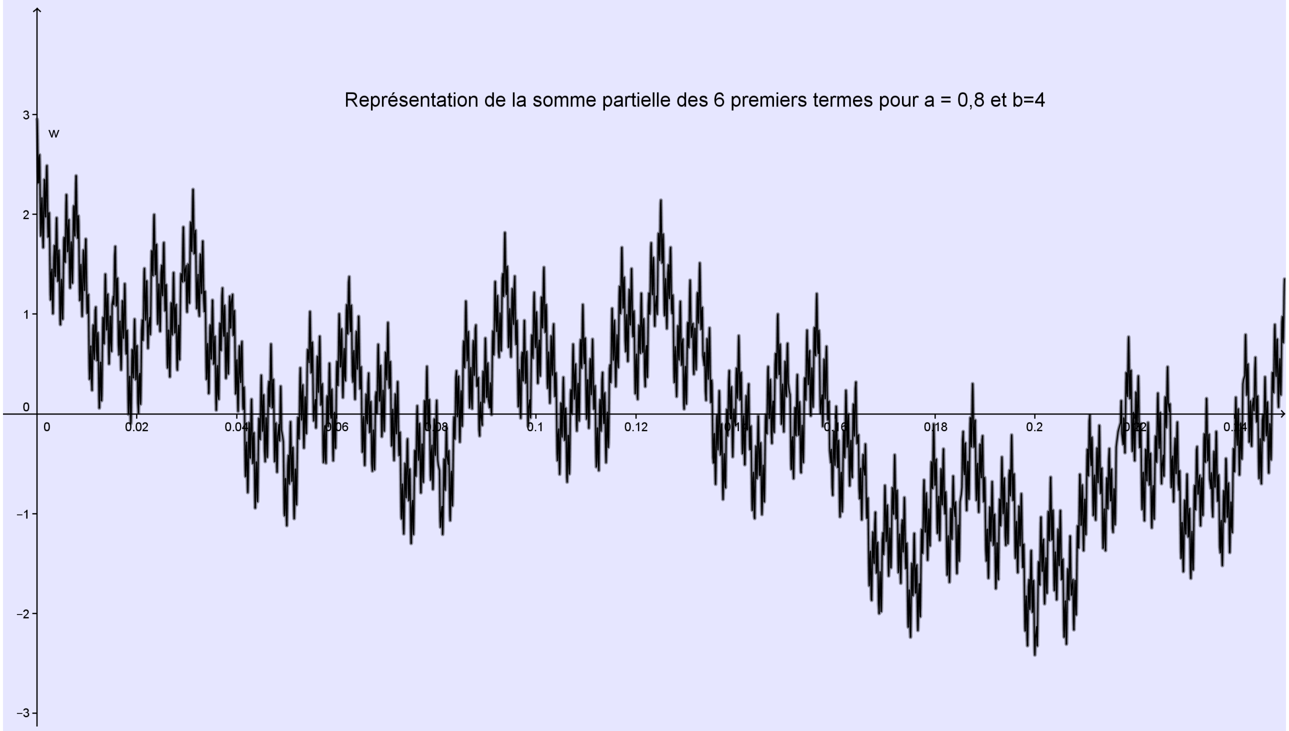
Abel fait remarquer que pour toutes les valeurs positives de x inférieures à π, on peut démontrer rigoureusement que $f(x) = x/2$ mais qu'on ne peut pas en conclure pour autant que $f(\pi) = \pi/2$ puisque $f(\pi) = 0$.

v) Fonction discontinue en tout point :

$f(x) = c$ si x est rationnel, $f(x) = d$ ($\neq c$) si x est irrationnel (Dirichlet, 1829)

vi) Fonction continue sur un intervalle et dérivable en aucun point de cet intervalle :

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a^n\cos(\pi b^n x)$$ où $0 < a < 1$ et b entier positif multiple de 4 (Weierstrass, 1872)



Étape 5 : La définition ensembliste

A la charnière entre le 19e et le 20e siècle, les travaux de Cantor et de Dedekind sur la théorie des ensembles et ceux de Frege, Peano et Russell sur la logique formalisée vont permettre une reformulation ensembliste de la définition d'une fonction s'étendant au delà du domaine numérique. Après avoir considéré la notion de fonction comme primitive, Peano en 1911 la réduit à celle d'une relation binaire particulière.

Si on a une correspondance de la classe a à la classe b, à tout individu x de la classe a correspond un seul individu y de la classe b. Ceci ne constitue pas une définition, puisque l'idée de correspondance, ou représentation, ou opération, ou fonction [..] est primitive. (Peano : *Sul* *concetto di numero* - 1891)

Une fonction est une relation u telle que si deux couples y;x et z;x, avec le même second élément, satisfont à la relation u, on a nécessairement, quels que soient x,y,z, que y = z. (Peano : *Sulla definizione di funzione* - 1911).

Quelques éléments pour une bibliographie

Ouvrages généraux

Cegielski Patrick, *Historique de la théorie élémentaire des ensembles* in Fragments d'histoire des mathématiques II, Brochure A.P.M.E.P. n°65, 1987.

Commission inter-IREM épistémologie et histoire des mathématiques, *Mathématiques au fil des âges*, Gauthier-Villars, Paris, 1987.

Dahan-Dalmedico Amy/Peiffer Jeanne, *Une histoire des mathématiques*, Seuil, Paris, 1986.

Dhombres Jean, *Nombre mesure et continu*, Cedic/Fernand Nathan, Paris, 1978.

Dieudonné Jean, *Abrégé d'histoire des mathématiques*, Hermann, Paris, 1986.

Youschkevitch Adolf P., *Le concept de fonction jusqu'au milieu du 19e siècle* in Fragments d'histoire des mathématiques, Brochure A.P.M.E.P. n°41, 1981.

Textes anciens

Euler Leonhard, *Introductio in analysin infinitorum*, Lausannae, 1748.

Gregory James, *Vera circuli et hyperbolae quadratura, in propria sua proportionis specie, inuenta, & demonstrata*, Patavii, 1667.

Leibniz Gottfried Willhem, *Naissance du calcul différentiel, 26 articles des Acta eruditorum*, introd., traduction et notes par Marc Parmentier. Paris, Librairie Philosophique J.Vrin, 1995.

Newton Isaac, *La méthode des fluxions et des suites infinies*, traduit par M. de Buffon. Paris 1740 (réed. Blanchard, Paris 1994).