Cet article a été publié en version papier dans les Actes du 11e colloque Inter-IREM
épistémologie et histoire des mathématiques
(pages 227 à 229, en annexe de l'article sur le jeu du Treize)
ISBN : 2-86612-138-4
Dépôt légal : Février 1998
Éditeur : IREM de Reims, Moulin de la Housse, BP 1039, 51687 Reims Cedex 2

Cette version mise en ligne reprend l'intégralité du texte,
la mise en page a été retouchée pour une meilleure lisibilité.

Annexe

Patrick Perrin

Traduction des remarques en latin de Nicolas Bernoulli sur le jeu du Treize. (Ces remarques figurent dans une lettre de Jean Bernoulli à Montmort datée du 17 mars 1710. [3, p. 301-302]. Il m'a semblé utile d'ajouter quelques notes explicatives. On les trouvera à la fin de la traduction.)

Remarques de M. (Nicolas) Bernoulli

Si les cartes que tient Pierre sont désignées par les lettres a, b, c, d, e, &c et que leur nombre est n, alors le nombre de tous les cas possibles sera = 1.2.3....n, le nombre de cas où a sera en première place sera = 1.2.3....n-1 ; le nombre de cas où b est en seconde place, a n'étant pas à la première = 1.2.3.[...]n-1 - 1.2.3....n-2 ; le nombre de cas où c est à la troisième place, a n'étant pas à la première ni b à la seconde = 1.2.3...n-1 - 2x1.2.3....n-2 + 1.2.3....n-3 ; le nombre de cas où d est à la quatrième place, aucune des lettres précédentes n'étant à sa place = 1.2.3....n-1 - 3x1.2.3....n-2 + 3x1.2.3....n-3 - 1.2.3....n-4 ; & généralement le nombre de cas, où il se peut qu'une carte m soit à sa place, aucune des précédentes n'étant à sa place, = 1.2.3....n-1 - $\frac{m-1}{1}\times$ 1.2.3....n-2 + $\frac{m-1.m-2}{1.2}\times$ 1.2.3....n-3 - $\frac{m-1.m-2.m-3}{1.2.3}\times$ 1.2.3....n-4 + ... jusqu'à $\pm\frac{m-1.m-2...m-m+1}{1.2.3...m-1}\times 1.2.3....n-m$, donc le sort du joueur qui veut gagner seulement par cette carte d'ordre m est = $\frac{1}{n}-\frac{m-1}{1}\times\frac{1}{n.n-1}+\frac{m-1.m-2}{1.2}\times\frac{1}{n.n-1.n-2}-\frac{m-1.m-2.m-3}{1.2.3}\times\frac{1}{n.n-1..n-2.n-3}+\ldots$ jusqu'à $\pm\frac{m-1.m-2...m-m+1}{1.2.3...m-1}\times\frac{1}{n.n-1...n-m+1}$, et le sort du joueur qui veut gagner au moins par une des m cartes = la somme de toutes les valeurs possibles de la suite précédente lorsque l'on donne à m les valeurs successives 1 . 2 . 3 &c. donc est = $\frac{m}{n}-\frac{m.m-1}{1.2}\times\frac{1}{n.n-1}+\frac{m.m-1.m-2}{1.2.3}\times\frac{1}{n.n-1.n-2}-\frac{m.m-1.m-2.m-3}{1.2.3.4}\times\frac{1}{n.n-1.n-2.n-3}+\ldots.$ jusqu'à $\pm\frac{m.m-1.m-2...m-m+1}{1.2.3...m-1}\times\frac{1}{n.n-1...n-m+1}$; donc ayant posé m = n le sort du joueur est $=1-\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}-\frac{1}{1.2.3.4}+\ldots\ldots$jusqu'à $\pm\frac{1}{1.2.3...n}$.

D'une autre façon. Ou bien a est à la première place, ou bien il ne l'est pas ; si a est à la première place, alors le sort est = 1,[i] s'il n'y est pas, alors il y a autant de cas d'obtenir 1, qu'il y en aurait si le nombre des cartes était n-1, excepté ces cas qui peuvent se produire, où la carte, dont a a pris la place, est à son tour à la première place, en effet ceux-là ne donnent pas 1, mais donneront la même espérance qu'il y aurait si le nombre de cartes était n-2 [ii] ; il y a autant de cas où cela se produit, qu'il y a d'arrangements possibles de n-2 cartes, soit 1.2.3...n-2 ; à partir de là ayant posé le sort de celui-ci = d quand le nombre des cartes est n-2, et g pour le sort quand le nombre des cartes est n-1, [iii] le nombre de cas gagnants, parmi l'ensemble des 1.2.3....n-1 cas, sera 1.2.3....n-1 $\times$ g lorsque le nombre des cartes est n-1 (en effet la valeur certaine ou 1 a à la valeur espérée la même raison que le nombre de tous les cas possibles au nombre des cas gagnants) par conséquent l'espérance qu'il a si a n'est pas en première place est = $\frac{1.2.3....n-1 \times g - 1.2.3....n-2 + 1.2.3...n-2[\times]d}{1.2.3...n-1}$ = $\frac{\overline{n-1} \times g - 1 + d}{n-1}$,[iv] comme donc à partir des n cas un seul seulement arrive de sorte que a est en première place, et n-1 cas où il n'y ait pas, le sort cherché sera = $\frac{1 \times 1 + n-1\frac{\overline{n-1} \times g - 1 + d}{n-1}}{n} = \frac{n-1 \times g + d}{n}$ [v].

A partir de là, il est clair que la différence entre le sort cherché et celui qu'il a si le nombre des cartes est n-1, est = $\frac{-g+d}{n}$ = la différence entre ce même sort et celui qu'il a si le nombre des cartes est n-2, mais négativement pris et divisé par le nombre des cartes n, à partir de là partant d'un nombre de cartes 0 et 1, le sort est 0 et 1, et la différence entre le sort si le nombre de cartes est 2, et le sort précédent (lorsque le nombre de cartes est inférieur d'une unité) sera = $-\frac{1}{2}$; si le nombre des cartes est 3, [la différence sera] = $+\frac{1}{2.3}$; si [le nombre des cartes est] 4, [la différence sera] = $-\frac{1}{2.3.4}$; si [le nombre des cartes est]5,[la différence sera] = $+\frac{1}{2.3.4.5}$, et généralement si le nombre des cartes est n ,[la différence sera] = $\pm\frac{1}{2.3.4..n}$ [vi]; et pour cette raison le sort total = $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2.3}-\frac{1}{2.3.4}+$ ......jusqu'à $\pm\frac{1}{2.3.4..n}$.

Source

[3] Montmort Pierre Rémond De, *Essay d'analyse sur les jeux de hazard*, seconde édition, Paris, 1713.

Notes

i La probabilité que Pierre gagne sachant que a est à la première place est égale à 1.

ii Supposons pour fixer les idées que a est à la 2ème place, on est ramené à étudier les arrangements des n-1 cartes {b,c,d,e,...}. Pierre peut alors gagner par toutes les cartes sauf b ; au nombre d'arrangements gagnants de n-1 cartes, que l'on a noté B_{n-1}, il faut donc enlever le nombre d'arrangements où seul b serait à sa place, ce nombre est égal à $(n-2)! - B_{n-2}$ puisque dans ce cas les n-2 autres cartes sont toutes dérangées.

iii Autrement dit, $g = B_{n-1}/(n-1)!$ et $d = B_{n-2}/(n-2)!$

iv C'est la probabilité que Pierre gagne sachant que a est à une place donnée autre que la première, soit : $(B_{n-1} - (n-2)! - B_{n-2})/ (n-1)!$

v .Il s'agit de la formule donnée par Montmort au §104. Si on appelle G l'événement « Pierre gagne » et A l'événement « a est à la première place », la formule s'écrit en termes actuels : $pG = p(G/A)pA + p(G/\overline{A})p\overline{A}$. On reconnait la formule des probabilités totales.

vi Si $u_n = B_n/n!$, on obtient la relation de recurrence $u_n - u_{n-1} = (u_{n-2} - u_{n-1})/n$; avec $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$, il vient : $u_2 - u_1 = - ½$; $u_3 - u_2 = 1/6$ ... $u_n - u_{n-1} = (-1)^{n-1}/n!$